

Table des matières

- I Equations scalaires**
 - I.1 Equations d'ordre 1 1
 - I.2 Equation d'ordre 2 1
 - I.3 Ordre 2, coefficients non constants 2

- II Systèmes différentiels linéaires**
 - II.1 Cauchy-Lipschitz 2
 - II.2 Cas A diagonalisable 2
 - II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant 2

I Equations scalaires

I.1 Equations d'ordre 1

Définition 1

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \tag{E}$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I . L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0 \tag{E_H}$$

On appelle solution de (E) toute **fonction** dérivable $y : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales* de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de (E) vérifiant en plus une condition (appelée condition initiale) du type $y(t_0) = \alpha$ (où $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) est appelé un problème de Cauchy

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)

Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ une fonction continue sur l'intervalle I et A une **primitive** de a sur I .

Les solutions de $(E_H) \forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont exactement les fonctions y de la forme $\forall t \in I \quad y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Si de plus on donne $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ pour transformer cette équation en problème de Cauchy en lui adjoignant la condition $y(t_0) = \alpha$, alors ce problème de Cauchy possède une unique solution.

Théorème 2 (Cauchy)

Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Étant donné $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution (sur I) y de l'équation différentielle (E) qui vérifie $y(t_0) = \alpha$.

Proposition 1 (Structure de l'ensemble des solutions)

On considère l'équation différentielle (E) . Notons A une primitive de a sur l'intervalle I

et $y_0 : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ t & \mapsto e^{-A(t)} \end{cases}$ une solution de l'équation homogène associée. Alors l'ensemble

des solutions de (E) est la droite affine $y_p + \text{Vect}(y_0)$ où y_p est l'une des solutions de (E) .

C'est à dire que toute solution y est de la forme $y_p + y_H$ où y_H est une solution quelconque de (E_H) .

I.2 Equation d'ordre 2

Définition 2

On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R} : ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)

On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans \mathbb{C} , alors

$y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi $y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sont quelconques

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est

solution de (E_H) ssi $y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{cases}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sont quelconques.

Si de plus on se donne $t_0 \in \mathbb{R}$ et $v_0, v'_0 \in \mathbb{C}$, alors il existe une unique solution y de l'équation différentielle homogène qui vérifie $y(t_0) = v_0$ et $y'(t_0) = v'_0$.

Théorème 4 (Résolution de l'équation homogène, cas réels)

On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans \mathbb{R} , alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notée $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme

$$y : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{cases} \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

De la même manière, un problème de Cauchy réel homogène possède une unique solution.

Théorème 5

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. Soient $t_0 \in I$ et $v_0, v'_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy suivant admet une unique solution.

$$\begin{cases} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = d \\ y(t_0) & = v_0 \\ y'(t_0) & = v'_0 \end{cases}$$

2. L'équation différentielle linéaire $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$ admet au moins une solution y_p sur I , et l'ensemble de ses solutions est le plan affine $y_p + \mathcal{S}_0$ où \mathcal{S}_0 est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Proposition 2 (Principe de superposition)

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$. Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.

I.3 Ordre 2, coefficients non constants

Théorème 6 (Cauchy-Lipschitz)

Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $v_0, v'_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = v'_0 \end{cases} \quad \text{possède une unique solution } \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) \text{ définie sur } I.$$

Théorème 7

Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de (E_H) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ quelconques) où y_1, y_2 sont solutions de (E_H) et **non proportionnelles** et toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H) .

II Systèmes différentiels linéaires

II.1 Cauchy-Lipschitz

Définition 3

Soit $Y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K}^n)$ une fonction à valeurs vectorielles. On pose $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soient également $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$ et une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Le système d'équations différentielles $Y' = AY + B$ est appelé un système différentiel linéaire à n équations et n inconnues, à coefficients constants.
2. Le système homogène associé est $Y' = AY$. Il est défini sur \mathbb{R} a priori.
3. Résoudre un tel système, c'est trouver toutes les fonctions y_1, \dots, y_n le vérifiant.
4. Soit $t_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{K}^n$. On appelle problème de Cauchy (en (t_0, Y_0)) le système
$$\begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Théorème 8

Avec les notations de la définition, un problème de Cauchy possède une unique solution.

Les hypothèses sont $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, I est un intervalle et $t_0 \in I$.

Théorème 9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (H) le système différentiel $Y' = AY$. L'ensemble \mathcal{S}_H de ses solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n .

Si $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^n)$, l'ensemble des solutions de $Y' = AY + B$ est un sous-espace affine de direction \mathcal{S}_H , c'est à dire que les solutions sont de la même forme que pour les équations scalaires précédentes.

II.2 Cas A diagonalisable

Proposition 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable dans \mathbb{K} . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres et V_1, \dots, V_n des vecteurs propres associés.

L'ensemble des solutions de $Y' = AY$ est $\text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_1 t} V_1, \dots, t \mapsto e^{\lambda_n t} V_n)$.

II.3 Lien avec les équations scalaires à coefficient constant