

Devoir maison n°0

A rendre le 11/09/2023

Exercice 1 (Systèmes)

Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et donner une interprétation géométrique de l'ensemble des solutions (est-ce une droite, un plan, un cercle, l'ensemble vide...?).

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 1 \end{cases} & 3. \begin{cases} x + y = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \\
 2. \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2 \\ x - y + 3z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} & 4. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 2 (Géométrie du plan)

1. Donner le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$.
2. Donner une équation de la droite $\mathcal{D}_1$ passant par $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et normale à $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
3. Même question pour $\mathcal{D}_2$ passant par A et dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
4. Même question avec $\mathcal{D}_3$ passant par A et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
5. Donner deux points, un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_4 : 2x - y + 2 = 0$.
6. Trouver les coordonnées du point d'intersection $\mathcal{D}_4$ et de la droite passant par B et perpendiculaire à $\mathcal{D}_4$. Interpréter géométriquement ce point.
7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que le point $M_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ est sur le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 1.
8. Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_1$ au point M_θ est la droite T_θ passant par M_θ et dirigée par $\vec{v}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ puis donner une équation de T_θ .

Exercice 3 (Continuité, classe $\mathcal{C}^1$)

On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner un développement limité en 0 de f à l'ordre 2.
3. En déduire que f est dérivable en 0, ainsi que l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
4. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ puis la limite de f' en 0. Qu'en déduire pour f ?

Exercice 4 (Application linéaire et matrice)

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ainsi que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à A . On a donc

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ X & \mapsto & AX \end{cases}$$

où X est une colonne de taille 3.

1. On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $f(u_1)$.
2. Déterminer $\text{Im}(A - 4I_3)$ ainsi que sa dimension (c'est à dire $\text{rg}(A - I_3)$).
3. Dédurre des deux question précédentes $\ker(A - 4I_3)$.
4. Calculer $\ker(A - I_3)$ et préciser sa dimension.
5. Donner une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. f est-elle bijective ? A est-elle inversible ?

Exercice 5 (Géométrie de l'espace)

On considère trois points de l'espace $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que ces trois points ne sont pas alignés.
2. Notons $\mathcal{P}$ le plan passant par ces trois points. Donner une base de $\mathcal{P}$, un vecteur normal et une équation.
3. On considère un point $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et la droite D_0 passant par M_0 et perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Déterminer le point d'intersection H_0 de D_0 et $\mathcal{P}$. Interpréter H_0 .
4. Soit Ω un point et $R > 0$ tels que la sphère de centre Ω et de rayon R soit tangente à $\mathcal{P}$ au point A et passe par B . Déterminer les coordonnées possibles de Ω et les valeurs de R correspondantes.

Exercice 6 (Puissances et croissances comparées)

1. Représenter sur un même graphique les courbes représentatives de $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\}$. Utiliser une couleur par valeur de α et légender votre schéma.
2. Lorsque $f = o_0(g)$ on note dans cette question $f \ll_0 g$. Si on a en plus $g = o_0(h)$ on aura $f \ll_0 g \ll_0 h$.
En utilisant cette notation, placer dans l'ordre les expressions

$$x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \sqrt{x}, \ln(x)$$

3. Même question, mais cette fois en utilisant $\ll_{+\infty}$ qui représente une négligeabilité en $+\infty$:

$$x, x^2, \frac{1}{x}, \ln^3(x), e^{-x}, 2^x, e^x$$

4. Déterminer un équivalent simple de

(a) $\frac{x^2 + \ln(x)}{xe^{-x} + 2}$ en 0 et en $+\infty$.

(b) $x \ln(1 + \frac{1}{x})$ en 0

(c) $x \ln(1 + x) - (x + 1) \ln(x)$ en 0 et $+\infty$

(d) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}$ en 2.

Indications

Exercice 1

- 1.
- 2.
3. Poser le bon paramètre.
4. Combien de paramètre à poser ? Faire le lien avec la dimension de l'ensemble des solutions.

Exercice 2

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
5. On peut bidouiller ou résoudre l'équation en tant que système.
6. Revenir à un des cas précédents pour trouver une équation de $\mathcal{D}_4$.
7. On peut utiliser une équation de ce cercle.
8. Que savons nous d'une tangente à un cercle en un point donné ?

Exercice 3

- 1.
2. Rappeler au passage le développement de $\frac{1}{1 \pm u}$ au choix.
3. Question de cours !
4. Pour une limite d'un quotient indéterminé, calculer un équivalent est sûrement une bonne idée. Ici une des expressions est une somme et il FAUT donc passer par un développement limité.

Exercice 4

- 1.
2. Revoir la définition. L'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses colonnes, et il faut réduire la famille qui est seulement génératrice a priori.
3. Utiliser un théorème et traduire la condition $X \in \ker(A - 4I_3) \iff$
4. Calcul direct. On doit retrouver un système du premier exercice.
5. On peut faire une analyse de la situation. Si $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base convenable alors les vecteurs v_i vérifient....
6. Lien entre les deux ?

Exercice 5

1. Parler de vecteurs.
2. Méthodes de cours
3. Une droite de l'espace n'est pas décrite par une seule équation. Il faut traduire Autrement $H_0 \in \mathcal{D}_0$.
4. Que dire d'un plan tangent à une sphère en un point ?

Exercice 6

- 1.
2. En cas de doute pour la comparaison de deux fonctions, écrire le quotient !
3. En cas de doute pour la comparaison de deux fonctions, écrire le quotient !
4. On pourra utiliser le fait que si $f = o(g)$ alors $f + g \sim g$ qui justifie le lien entre DL et équivalent.