

Table des matières

- I Sur les fonctions** 1
- I.1 Relations de comparaisons 1
- I.2 Les outils de calcul 1
- I.3 Croissances comparées 3
- II Sur les suites** 4
- II.1 Rappels sur les suites géométriques 4
- II.2 Comparaison des suites 5

I Sur les fonctions

I.1 Relations de comparaisons

I.1.1 Définition

Soit I un intervalle, $a \in \bar{I}$ et $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ (a est dans I ou est une borne de I , éventuellement infinie)

1. On dit que $f \sim_a g$ ssi $\frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et $\frac{g}{f} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$. (f et g sont équivalentes, au voisinage de a)
 Cette définition n'a du sens que lorsque le calcul de ces limites en a un. En particulier, les fonctions en jeu ne s'annulent pas au voisinage de a .
2. On dit que $f = o_a(g)$ ou $f = o_a(g)$ ssi $\frac{f}{g} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. (f est négligeable devant g , au voisinage de a)

En particulier les fonctions f et g ne peuvent pas être la fonction nulle

I.1.2 Remarque

On ne peut donc pas écrire $f \sim_a 0$ avec notre définition...

I.1.3 Piège

Ce n'est pas parce que $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ que $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$. Trouver un exemple où on a pas $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$.

De même, on a pas forcément $\exp(f_1) \sim_a \exp(g_1)$

I.1.4 Exemple

1. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \iff f(x) = o_a(1)$ et plus généralement, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \iff f(x) = \ell + o_a(1)$.

2. On a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \iff f(x) \sim_a \ell$. Attention au fait que $\ell \neq 0$ et est une limite finie.

I.2 Les outils de calcul

I.2.1 Théorème (Taylor-Young)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I et $a \in I$. Alors f possède un développement limité à l'ordre n en a sous la forme

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \\
 &\dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o_a((x-a)^n) \\
 &= \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} + o_a((x-a)^n)
 \end{aligned}$$

I.2.2 Ecriture en 0

Dans le cas des formules usuelles, a est pris égal à 0 et on obtient

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o_0(x^n)$$

Une chose à bien retenir : les facteurs des puissances de x sont des nombres qui sont en fait les coefficients d'un certain polynôme.

I.2.3 Les développements usuels

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a au voisinage de 0 les développements limités usuels suivant (à connaître!)

1. Exponentielle, logarithme, puissances

$$e^x =$$

$$\ln(1+x) =$$

$$\frac{1}{1-x} =$$

$$(1+x)^\alpha =$$

2. Trigonométrie circulaire

$$\sin x =$$

$$\cos x =$$

3. Trigonométrie hyperbolique.

$$\operatorname{sh} x =$$

$$\operatorname{ch} x =$$

I.2.4 Proposition

Avec les notations de la définition précédente, on a $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$.

Il s'agit de l'outil le plus pratique pour passer d'un équivalent à un "développement", et réciproquement. On retrouve ici que l'équivalent en a d'une fonction est le premier terme non nul dans un développement limité en a .

I.2.5 Exemple

1. Une application directe : $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

2. Avec des croissances comparées : $x^2 + x + 1 = x^2 + o_{+\infty}(x^2) \underset{+\infty}{\sim} x^2$.

I.2.6 Proposition (Méthode d'intégration terme à terme)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I et $a \in I$.

Si f' admet un développement limité à l'ordre n en a alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a qui s'obtient en calculant terme à terme une primitive du développement de f' et en choisissant comme constante la valeur $f(a)$.

I.2.7 A savoir retrouver

En utilisant la méthode d'intégration terme à terme (sans oublier de rajouter la bonne constante d'intégration, à savoir le terme $f(0)$ dans Taylor-Young)

1. Le développement à tout ordre de arctan
2. Les développements à un ordre donné de arcsin, arccos

I.2.8 Règles de calcul

Rappel :

- On peut multiplier, diviser ou mettre à une puissance **fixée** une relation d'équivalence, mais pas sommer ni soustraire terme à terme. On ne peut **pas** composer de chaque côté une relation d'équivalence par une fonction (en particulier, par exp ou ln).
- Les développements sont des égalités qui se manipulent donc comme telles, avec les règles de calculs connues sur les o_a :
 - $o_a(f) \pm o_a(f) = o_a(f)$: quand plusieurs o_a identiques apparaissent, on en conserve un seul
 - Si λ est une constante non nulle, $o_a(\lambda f) = o_a(f)$.
 - Dans le cas d'une forme $o_a(f) + o_a(g)$ on conserve un seul "petit o" : on retire celui qui est négligeable devant l'autre.
 - $o_a(f) \pm o_a(f) = o_a(f)$: rien ne sert de faire apparaître un signe moins devant un o_a , ni d'avoir deux fois le même o_a dans une somme.
 - $f \times o_a(g) = o_a(fg)$. **à lire dans les deux sens!**
 - A l'intérieur d'un "petit o" ou d'un "grand o", on peut remplacer une expression par son équivalent.
 - On peut effectuer des changements de variables dans les développements usuels en 0, à condition que la nouvelle expression tende bien vers 0.

Conclusion : à par pour une multiplication ou division (ou mise à une puissance fixe) terme à terme, on passera systématiquement par un développement en utilisant la règle $f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g) \iff g = f + o_a(f)$.

I.2.9 Exemple

1. Trouvons un équivalent de $\sqrt{x^2 + 1}$ en $+\infty$. On a $x^2 + 1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$ car $1 = o_{+\infty}(x^2)$.

Ainsi $\sqrt{x^2 + 1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{x^2} = x$ (car on est au voisinage de $+\infty$ et donc $x \geq 0$).

2. Donnons un développement de $\ln(x+1)$ en $+\infty$. Ici on ne peut pas utiliser l'équivalent usuel qui n'est valable que lorsque $x \rightarrow 0$.

Pour $x > 0$, on a $\ln(x + 1) = \ln(x(1 + \frac{1}{x}))$ (méthode importante : on a factorisé à l'intérieur par l'équivalent), donc

$$\ln(1 + x) = \ln(x) + \ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(x) + \frac{1}{x} + o_{+\infty}(\frac{1}{x})$$

où la dernière étape est un changement de variable $u = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ dans l'équivalent usuel $\ln(1 + u) \underset{0}{\sim} u$ ou encore dans le développement $\ln(1 + u) = u + o_0(u)$.

On ne peut pas sommer les équivalents, donc ici on est obligé de passer la forme développement.

I.2.10 Proposition (Équivalent par encadrement)

Soient $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \bar{I}$ ($a \in I$ ou a est une borne de I , éventuellement ouverte).

Si on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour x au voisinage de a , et $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$ alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$.

Preuve.

On a $h(x) = f(x) + o_a(f(x))$ et donc, au voisinage de a , $f(x) \leq g(x) \leq f(x) + o_a(f(x))$. Ainsi $0 \leq g(x) - f(x) \leq o_a(f(x))$.

Comme f ne s'annule pas au voisinage de a (on a supposé qu'on connaît un équivalent de f , voir la définition), $|f(x)| > 0$ pour x au voisinage de a et en divisant par $|f(x)| > 0$ on obtient

$$0 \leq \left| \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right| \leq o_a\left(\frac{f(x)}{|f(x)|}\right)$$

car ici $g(x) - f(x) = |g(x) - f(x)|$. De plus, $\frac{f(x)}{|f(x)|}$ est une quantité qui vaut toujours 1 ou -1 et donc le o_a tend vers 0 lorsque $x \rightarrow a$.

D'après le théorème d'encadrement, $\left| \frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et donc $\frac{g(x) - f(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Ce ci peut s'écrire $g(x) - f(x) = o_a(f(x))$ ou encore $g(x) = f(x) + o_a(f(x))$. CQFD.

La preuve est technique dans le cas général car on ne connaît pas le signe de f alors qu'on veut diviser une inégalité. En pratique, le signe de f est souvent évident au voisinage de a et la preuve devient beaucoup plus simple. ■

I.3 Croissances comparées

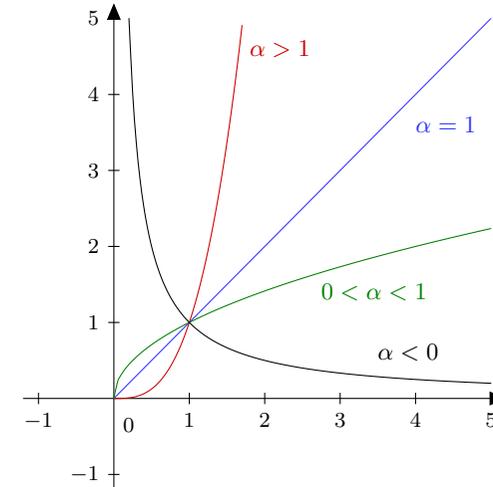
I.3.1 Sur les puissances

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha < \beta$. Les comportements en 0 et $+\infty$ sont opposés :

$$x^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta) \text{ et } x^\beta = o_0(x^\alpha)$$

I.3.2 Rappel

On peut se souvenir du résultat précédent grâce à un autre résultat important du cours : les positions relatives des fonctions puissances.



I.3.3 Théorème (Retour en terminale)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Ces résultats nous permettrons de démontrer la version du théorème vue en 1ère année

Preuve.

— Montrons d'abord que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Soit $x \geq 1$, alors on a $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$.

Comme, pour $t \in [1, x]$, on a $t \geq \sqrt{t} > 0$, on a alors $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$ et par croissance de l'intégrale

$$\ln(x) \leq [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - x$$

En divisant par $x > 0$, on obtient $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

— On sait que $x = e^t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Par changement de variable dans la limite précédente, on obtient donc $\frac{\ln(e^t)}{e^t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0^+$ et par passage à l'inverse $\frac{e^t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$.

— Montrons finalement que $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$.

Cette fois on effectue le changement de variable $t = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et on avait

$\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit $x \ln\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ ou encore $-x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$. Il suffit de passer à l'opposé. ■

I.3.4 Théorème (Comparaison en $+\infty$)

Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. Ces nombres sont **strictement positifs**.

1. $(\ln(x))^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$.
2. $x^\beta = o_{+\infty}(e^x)$

Preuve.

La même technique de changement de variable permet de prouver seulement la première comparaison.

Or, pour $x > 1$, $\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\ln(x)}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$. Remarquons, en posant $t = x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ que $x = t^{\frac{\alpha}{\beta}}$ et donc $\ln(x) = \frac{\alpha}{\beta} \ln(t)$.

De plus, $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ et donc $t \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. On a déjà vu, que $\frac{\ln(t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$. Il reste à voir, en posant $u = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln(t)}{t}$ que $u \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $u^\alpha \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ car $\alpha > 0$ pour conclure :

$$\frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \blacksquare$$

I.3.5 Théorème (Comparaison en 0)

Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. $|\ln(x)|^\alpha = o_0\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$ ou encore $x^\beta |\ln(x)|^\alpha \xrightarrow{0^+} 0$.

Preuve.

Il s'agit simplement de poser $t = \frac{1}{x}$ dans le théorème précédent car on a $x \rightarrow 0^+ \iff t \rightarrow +\infty$. ■

II Sur les suites

Ici la situation est plus simple, car les seules limite que l'on peut étudier sont quand l'indice (souvent noté n) tend vers $+\infty$

Rappel

Pour une suite $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ on a

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

II.1 Rappels sur les suites géométriques

II.1.1 Forme des suites géométriques

Ce sont les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifient une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ où $q \in \mathbb{C}$ est fixé (comprendre, ne dépend pas de l'indice n).

On a alors, par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = u_0 q^n$.

II.1.2 Lemme

Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Si $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors sa limite est 0.

Preuve.

Notons $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = q^n$ et supposons que $u_n \xrightarrow{+\infty} l \in \mathbb{C}$.

Alors $u_{n+1} \xrightarrow{+\infty} l$. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = q^{n+1} = qu_n$ et donc par produit de limites finies $u_{n+1} \xrightarrow{+\infty} ql$. Par unicité de la limite, $l = ql$ et donc $l(q - 1) = 0$. Comme $q - 1 \neq 0$ on a alors $l = 0$ ■

II.1.3 Théorème (Limites des suites géométriques)

Soit $q \in \mathbb{C}$.

1. $q^n \xrightarrow{+\infty} 0$ ssi $|q| < 1$.
2. $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi $|q| < 1$ ou $q = 1$.
3. Dans le cas où $q \in \mathbb{R}$ on peut ajouter que $q^n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ ssi $q > 1$.

II.2 Comparaison des suites

II.2.1 Proposition

Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite **bornée** et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. Si $v_n \xrightarrow{+\infty} 0$ alors $u_n v_n \xrightarrow{+\infty} 0$.
2. Si $v_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$ alors $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{+\infty} 0$ ou encore $u_n = o_{+\infty}(v_n)$.

II.2.2 Définition

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ deux suites avec (v_n) qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que (u_n) est **dominée** par (v_n) ssi la suite $(\left| \frac{u_n}{v_n} \right|)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

On note alors $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ (grand o).

II.2.3 Règles de calcul

Elles sont les mêmes que pour les petits o. En particulier on pourra écrire

1. $O_{+\infty}(u_n) = u_n O_{+\infty}(1)$
2. $O_{+\infty}(u_n) \pm O_{+\infty}(u_n) = O_{+\infty}(u_n)$

avec, comme d'habitude, la précaution élémentaire de se souvenir que chaque O représente une suite, et que ces suites ne sont pas égales même si elles s'écrivent sous la même forme.

II.2.4 Proposition (Comparaison à une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite à valeurs **strictement positive**. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$ (ou $\ell = +\infty$).

1. Si $\ell < 1$, alors pour tout $q \in]\ell, 1[$, $u_n = o_{+\infty}(q^n)$.
2. Si $\ell > 1$, alors pour tout $q >]1, \ell[$, $q^n = o_{+\infty}(u_n)$.

Dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas directement comparer (u_n) à une suite géométrique à l'aide d'une relation de négligeabilité qui indiquerait la limite de (u_n) .

Preuve.

Correction On traite le cas $0 \leq \ell < 1$. Le cas $\ell > 1$ est une conséquence directe en passant à l'inverse.

Soit $q \in]\ell, 1[$. On pose $a = \frac{q+\ell}{2}$ (le milieu de q et ℓ , sur la droite réelle). Alors on a $\ell < a < q < 1$.

A partir d'un certain rang n_0 , $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in]0, a[$. Ainsi pour $n > n_0$, on peut écrire

$$u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \dots \times \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \times u_{n_0}$$

Par multiplications d'inégalités entre nombres positifs, on a donc $u_n \leq a^{n-n_0} u_{n_0} = a^n K$ où $K = \frac{u_{n_0}}{a^{n_0}}$ est une constante (on a fixé q).

Toujours par multiplication d'inégalités entre nombres positifs, $0 \leq \frac{u_n}{q^n} \leq K \left(\frac{a}{q}\right)^n$. or $\frac{a}{q} \in [0, 1[$ et donc par le théorème d'encadrement, $u_n = o_{+\infty}(q^n)$.

II.2.5 Corollaire

Avec les mêmes notations, et toujours pour (u_n) **strictement positive**

1. Si $l < 1$, alors $u_n \xrightarrow{+\infty} 0$.
2. Si $l > 1$ alors $u_n \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

Le résultat de la proposition est plus précis, car il indique que (u_n) tend "plus vite" que certaines suites géométriques.

II.2.6 Théorème

Soient $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$. Soit $q > 1$.

1. $\ln(n)^\alpha = o_{+\infty}(n^\beta)$.
2. $n^\beta = o_{+\infty}(q^n)$.
3. $q^n = o_{+\infty}(n!)$.
4. $n! = o_{+\infty}(n^n)$.

Preuve.

1. Il s'agit d'un simple changement de variable dans le théorème sur les fonctions.
2. Idem, en rappelant que comme $q > 0$, on a $q^n = e^{n \ln(q)}$ et comme $q > 1$ on a bien $\ln(q) > 0$.
3. Cette fois on ne peut pas se fier aux fonctions, car nous ne connaissons pas (encore...) de fonction dont la restriction à \mathbb{N} serait la factorielle.

Utilisons le résultat de II.2.4. Pour $n \geq 0$, on pose $u_n = \frac{q^n}{n!} > 0$. Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{q^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{q^n} = \frac{q}{n+1} \xrightarrow{+\infty} 0$$

On peut ainsi en conclure que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ qui est bien la définition de $q^n = o_{+\infty}(n!)$.

On a même prouvé un résultat plus fort et complètement naturel (si on y prend garde) : (u_n) tend vers 0 "plus vite" que n'importe quelle suite géométrique, ou encore : on peut multiplier (u_n) par n'importe quelle suite géométrique, par exemple (1000^n) et on a encore $1000^n u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

4. Utilisons la même technique. Posons, pour $n > 0$, $u_n = \frac{n!}{n^n}$. On a bien $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $u_n > 0$.

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)(n+1)} \times \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^n \times (n+1)} \times n^n \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= e^{-n \ln(1 + \frac{1}{n})} \end{aligned}$$

Or $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et on a $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Donc $\ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et par produit d'équivalents,

$$-n \ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$$

On ne peut pas composer cet équivalent par l'exponentielle pour obtenir un équivalent de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Ainsi $-n \ln(1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$ et par composition **de limites** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1} < 1$.

Ainsi, d'après II.2.4, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et on a bien $n! = o_{+\infty} n^n$. ■

Index

Croissances comparées, 4

Règle de d'Alembert
pour les suites, 5

Suites géométriques, 5

Taylor-young, 1