Règles de calcul

Exercice 1

1. Donner un équivalent en 0 de $\sin^3$ puis un développement limité à l'ordre 4.
2. Donner un équivalent puis un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $e^x \times \ln(1+x)$.
3. Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\sqrt{1+x^2}$.
4. Donner un développement limité à l'ordre 6 en 0 de $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Limites indéterminées

Exercice 2

1. Que dire de la limite de $\frac{1}{x}$ quand $x \to 0$?
2. Donner toutes les formes de limites indéterminées.

Exercice 3

Dire si les limites suivantes sont indéterminées, les calculer et préciser le cas échéant la croissance comparée utilisée.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-4x+3}{e^{-x}+\sin(\frac{1}{x})}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)+2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Exercice 4

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

1. $n > 0$ fixé, $\cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$ en 0.
2. $\frac{x^2+\ln x}{x^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{2}{3}\right)^x}$ en $+\infty$.
3. $\frac{\sqrt[4]{x+x^{\frac{6}{5}}}}{x^{-1}+1}$ en 0.
4. $\frac{xe^x}{x^2+x}$ en 0 et en $+\infty$.

Exercice 5 (Un peu plus difficile)

Déterminer un équivalent des procédés suivants :

1. $\ln(\cos(x))$ en 0
2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2+1}$ en 0 et en $+\infty$
3. $\ln(x^2+x+1) - 2\ln(x)$ en $+\infty$.
4. $\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(x+x^2)}$ en 0.

Exercice 6

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} k!$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 2\ n! \leqslant u_n \leqslant n!(1+\frac{2}{n})$ par récurrence.
2. En déduire un équivalent de u_n.

Révisions sur les suites

Exercice 7

Trouver une suite (u_n) divergente (par exemple qui tend vers $+\infty$) et telle que $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0.

Exercice 8

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
2. Etudier la monotonie de (u_n).
3. Montrer que (u_n) converge et ensuite calculer sa limite.

Comparaison des suites

Exercice 9

Que signifie $u_n = O_{+\infty}(1)$ pour la suite (u_n) ?

Exercice 10

Soient (u_n) et (v_n) des suites à valeurs réelles ou complexes (et qui se s'annulent pas).

1. Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n = O_{+\infty}(v_n)$.
2. Montrer que $u_n = o_{+\infty}(v_n) \Rightarrow u_n = O_{+\infty(v_n)}$.

Exercice 11

Calculer les limites suivantes et traduire en terme de $o_{+\infty}$ (2 traductions à chaque fois).

1. $n^2e^{-n} \underset{+\infty}{\to}$
2. $\frac{n^2}{n!} \underset{+\infty}{\to}$
3. $n^2e^{-(\ln(n))^2} \underset{+\infty}{\to}$
4. $\frac{\sqrt{n^3+2n+1}}{n\ln(n)} \underset{+\infty}{\to}$

Exercice 12

Pour les suites (u_n) suivantes, vérifier qu'elles sont **strictement positives**, calculer la limites de $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ ainsi que celle de (u_n).

1. $u_n = \frac{1}{n}$
2. $u_n = \sin(\frac{1}{n})$
3. $u_n = \binom{2n}{n}$
4. $u_n = \ln(n^2+1)$

Pour aller plus loin

Exercice 13
Nous allons étudier plus précisément la suite $u_n = \binom{2n}{n}$. Une manière classique est d'étudier $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   Indication : une méthode très classique pour obtenir une relation de récurrence sur des intégrales est d'effectuer une intégration par parties.
3. Calculer I_0 et exprimer I_{2p} en fonction de I_0 pour tout $p \in \mathbb{N}$. On attend une expression faisant intervenir u_p.
4. Calculer I_1 et exprimer I_{2p+1} en fonction de I_1 pour tout $p \in \mathbb{N}$.
5. Montrer, en utilisant les questions 1 et 2, que $I_{2p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} I_{2p}$.
6. Donner un équivalent de u_p.

Exercice 14
Etudier la suite[1] : $u_0 \in [1, 2]$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15
On considère la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que c'est un intervalle.
2. Donner un équivalent de f à chaque borne ouverte de son intervalle de définition. Qu'en déduire sur l'allure de la courbe ? (on attend ici un terme précis)
3. Donner un tableau de variations complet, incluant les limites aux bornes.
4. Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de f. En déduire une équation de la tangente à la courbe de f en 0 ainsi que les positions relatives de la courbe de f et de cette tangente.
5. Tracer précisément la courbe de f.

1. Rappel : on a $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut étudier des intervalles stables par f ainsi que ses points fixes...