# Table des matières



# I Séries convergentes

## I.1 Vocabulaire

### I.1.1 Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général $u_n$ et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ la **suite** $(S_N)$ définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

   On dit que $S_N$ (le nombre) est la $N$ième somme partielle de cette série.

   Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé $n_0$ (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$.

2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.

   Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

### I.1.2 Exemple

Considérons la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n}$. On note $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ la $N$-ième somme partielle, pour $N \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$.

Alors

$$\begin{aligned}
&S_1 = 1 \\
&S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\
&S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \\
&S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12} \\
&\ldots
\end{aligned}$$

La figure 1 illustre l'évolution des valeurs de $S_N$ : on place sur un graphique des points de coordonnées $(N, S_N)$ pour différentes valeurs de $N$.

Sur la dernière figure, on a également fait figurer la fonction $x \mapsto \ln(x) + \gamma$ où $\gamma$ est une certaine constante.

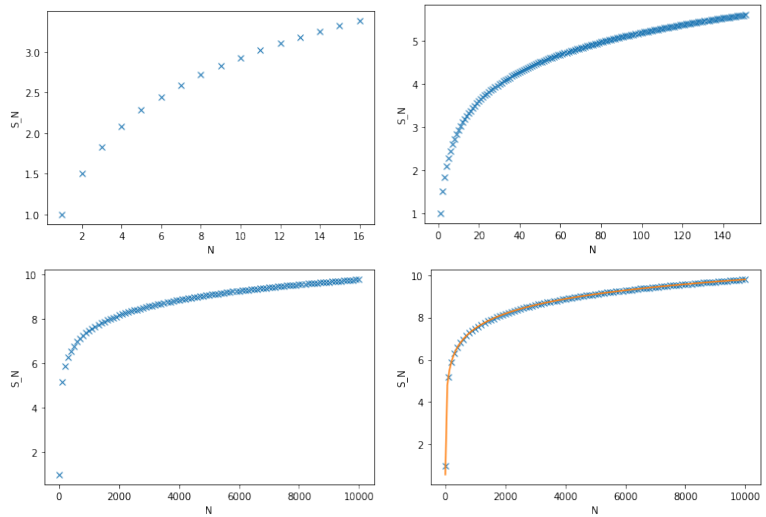


FIGURE 1 – Sommes partielles de la série harmonique

**I.1.3 Proposition**
Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes et notons $z_n = x_n + iy_n$ la forme algébrique de chaque terme.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge ssi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ convergent. En cas de convergence on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

**Preuve.**
Simple traduction de la même propriété sur les suites, en considérant les suites de sommes partielles. ■

### I.1.4 Modifier une série

On ne change pas la nature convergente ou divergente d'une série en modifiant les $k$ premières valeurs de $u_n$ pour un $k$ fixé. Par contre on modifie la valeur de la somme...

Par exemple, $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge ssi $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge (ce qui revient à fixer à 0 les deux premiers termes de $u_n$).

**I.1.5 Définition-Proposition**
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

**SI** $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$ **ALORS** $\sum u_n$ diverge.

Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

**Preuve.**
Supposons, au contraire, que $\sum u_n$ converge. Notons $(S_N)$ la suite des sommes partielles.

Alors on a $S_N - S_{N-1} = u_N$ et comme $(S_N)$ converge, $u_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$. Contradiction. ■

### I.1.6 Utilisation

Ce résultat n'a qu'une seule utilité : prouver qu'une série diverge. La contraposée est : si $\sum u_n$ converge alors $(u_n)$ converge et sa limite est 0.

Exemple : montrer que $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

**I.1.7 Proposition**
Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge. Dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

— Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire a priori sur $\sum(u_n + v_n)$ (cette dernière série peut être convergente ou divergente, suivant les cas).

**Preuve.**

— Trivial. Revenir aux sommes partielles.

— On fait un raisonnement par l'absurde. Si $\sum(u_n + v_n)$ converge, alors, d'après le point précédent, $\sum((u_n + v_n) - u_n)$ converge. Contradiction.

— Par exemple $\sum(1 + (-1))$ converge. ■

### I.1.8 Attention

Le premier point est très pratique. Il s'agit de la linéarité de la somme de séries, mais il ne s'applique que lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent toutes les deux.

## I.2 Séries de référence

**I.2.1 Proposition (Séries géométriques)**
Soit $q \in \mathbb{C}$. $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

**Preuve.**
D'après le chapitre précédent $(q^n)$ converge vers 0 ssi $|q| < 1$, ce qui prouve la divergence grossière si $|q| \geqslant 1$.

Pour la convergence dans le cas $|q| < 1$, on effectue le calcul classique, pour $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{N} q^n = \frac{1}{1-q} - q^{N+1}\frac{1}{1-q}$ avec $q^{N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ car $|q| < 1$. ■

**I.2.2 Théorème**
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

**Preuve.**
On évacue directement le cas $\alpha \leqslant 0$ : la série diverge grossièrement.

Pour les cas $\alpha > 0$, on utilise une méthode très utile.

Soit $N \geqslant 2$. On note $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$. Remarquons que $S_{N+1} - S_N = \frac{1}{(N+1)^\alpha} \geqslant 0$ et donc $(S_N)$ est une suite réelle croissante.

Pour $n > 1$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

En sommant pour $n$ allant de 2 à $N$ on obtient

$$\int_2^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant S_N - 1 \leqslant \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$

Distinguons maintenant 3 cas :

1. Si $\alpha = 1$, l'encadrement devient $\ln(N+1) - \ln(2) + 1 \leqslant S_N \leqslant \ln(N) + 1$. Par encadrement, $S_N \underset{N\to+\infty}{\to} +\infty$ et donc la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. Si $\alpha \neq 1$, une primitive de $t \mapsto t^{-\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $t \mapsto \frac{1}{-\alpha+1}t^{-\alpha+1}$. Dans ce cas on obtient l'encadrement
$$\frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}\right) + 1 \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 1\right) + 1$$
Pour étudier le comportement lorsque $N \to +\infty$, nous devons connaître le signe de $1 - \alpha$.
Traitons pour commencer le cas $1 - \alpha > 0$ c'est à dire $\alpha < 1$. Dans ce cas $S_N \to +\infty$ par encadrement et la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
3. Si $\alpha > 1$, c'est à dire $1-\alpha < 0$, on obtient l'inégalité $S_N \leqslant \frac{1}{\alpha-1}(1-\frac{1}{N^{\alpha-1}})+1 \leqslant \frac{1}{\alpha-1} + 1$. Alors la suite $(S_N)$ est majorée en plus d'être croissante et converge donc.

En résumant tous les cas traités, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ (et donc diverge ssi $\alpha \leqslant 1$). ■

### I.2.3 Série divergente

La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente appelée série harmonique.

**I.2.4 Théorème (Taylor avec reste intégral)**
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a \in I$.

$$\forall x \in I \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

**Preuve.**
Soit $x \in I$

— Le cas $n = 0$ est simplement $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ qui est bien vérifié lorsque $f$ est $\mathcal{C}^1$.

— Supposons, pour un $n \geqslant 1$ fixé, qui la formule est valide pour l'entier $n-1$ et une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^n$.
Alors, par intégration par parties, on a

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \times f^{(n)}(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Le crochet vaut $-0 + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ qui est exactement le terme d'indice $n$ dans la somme proposée.

— Finalement, par récurrence, la théorème est vrai pour tous les entiers $n$. ■

**I.2.5 Proposition (Série exponentielle)**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

**Preuve.**
Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre $n$ à exp entre 0 et $x$ (exp est de classe $n+1$ sur ce segment) donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$$

Ainsi $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |(x-t)^n e^t| \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{1}{n!} \left| \int_0^x |x|^n e^t \mathrm{d}t \right| = \frac{|x|^n |e^x - 1|}{n!}$.

Par croissances comparées, $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. ∎

### I.2.6 Une série télescopique

Exemple : Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

## I.3 Séries à termes positifs

### I.3.1 Cadre

On s'intéresse dans ce paragraphe aux séries $\sum u_n$ où $(u_n)$ est une suite de réels **positifs**.

En posant, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$, on voit que $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geqslant 0$. Ainsi la suite $(S_N)$ des sommes partielles est une suites croissantes de réels.

**I.3.2 Théorème**
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup \left( \left\{ \sum_{k=0}^{N} u_n | \ N \in \mathbb{N} \right\} \right)$.

### I.3.3 Remarque

Le théorème suivant est fondamental pour la compréhension et l'intuition des séries à termes positifs convergentes. Le terme général ne doit pas "être trop grand", ou encore il doit tendre vers 0 (sinon : divergence grossière) "suffisamment vite".

**I.3.4 Théorème (Comparaison des séries à termes positifs)**
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels **positifs**.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

**Preuve.**
On note $(S_N)$ et $(T_N)$ les suites des sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ respectivement.

1. On fait la preuve dans le cas où le certain rang est le rang 0. Sinon, comme dit précédemment, on peut ignorer les premiers termes de chaque séries sans changer leurs natures.
   On a alors, par somme d'inégalités, $S_N \leqslant T_N$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Comme $\sum v_n$ converge, $(T_N)$ est une suite majorée. Notons $M$ un majorant. On a finalement $\forall N \in \mathbb{N}\ S_N \leqslant M$ et donc $(S_N)$ est majorée donc converge.
2. On a cette fois, pour un certain $M \in \mathbb{R}^+$ fixé, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant M v_n$ (car $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est majorée et on note $M$ un majorant). Par linéarité, $\sum M v_n$ converge et on applique le point précédent.
3. Dans ce cas, on a (cf TD) $u_n = O(v_n)$ et on applique le point précédent.
4. Dans ce cas on a à la fois $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$... ∎

### I.3.5 Remarque

Ce théorème sera notre meilleur outil pour prouver la convergence ou la divergence des séries. L'idée fondamentale pour son application : on trouve $(v_n)$ qui permet de vérifier les hypothèses de 3. ou 4. en cherchant $\sum v_n$ parmi les séries de référence.

**I.3.6 Exemple**

1. $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.
   On a $\frac{1}{n^n} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.
2. $\sum \frac{n+3}{n^3-n}$ converge.
   Cette fois, $\frac{n+3}{n^3-n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. On conclut en utilisant exactement la même rédaction qu'au 1).

### I.3.7 Convergence et croissances comparées

Rappelons qu'avec la notation << signifiant "est négligeable devant", on avait $\frac{1}{n^n} << \frac{1}{n!} << q^n << \frac{1}{n^\alpha} << \frac{1}{\ln(n)^\beta}$ lorsque $\alpha, \beta > 0$ et $|q| < 1$. On peut résumer l'interaction avec le théorème précédent par

$$\underbrace{\frac{1}{n^n} << \frac{1}{n!} << q^n << \frac{1}{n^\alpha}\ (\alpha > 1)}_{\text{la série converge}} << \underbrace{\frac{1}{n^\alpha}(\alpha \leqslant 1) << \frac{1}{\ln(n)^\beta}}_{\text{la série diverge}}$$

### I.3.8 Séries à termes négatifs

Pour traiter une série dont les termes sont négatifs (à partir d'un certain rang) on utilise le résultat (facile !) suivant :

$$\sum u_n \text{converge ssi} \sum(-u_n)\text{converge}$$

### I.3.9 Méthode

Après avoir vérifié que $u_n \geqslant 0$, on commence par calculer un équivalent simple si possible et on raisonne sur l'équivalent, par exemple en essayant de la comparer à un terme général de série de Riemann. On peut également calculer un développement asymptotique pour trouver cet équivalent.

### I.3.10 $n^\alpha u_n$

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs et $\alpha > 1$

1. Si on a $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $\sum u_n$ converge.

   On a en effet $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ dans ce cas.
2. Si on a $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} \ell \neq 0$ alors $\sum u_n$ converge car $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$ qui est un terme général de signe constant d'une série convergente.

On utilise généralement ce raisonnement après avoir calculé un équivalent, si possible. Voir le point précédent.

### I.3.11 Exemple

1 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{n}{2^n}$ converge. Question 5/2 : quelle est sa somme ? Quel chapitre utiliser ?

On pose $u_n = \frac{n}{2^n}$ pour tout $n$. Alors $n^2 u_n \underset{+\infty}{\to} 0$ et donc $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par comparaison de série à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2 Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(n+3)\ln(n)}{n^3+3n+2}$ converge.

En posant $u_n$ le terme général pour $n \geqslant 1$, on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n\ln(n)}{n^3} = \frac{\ln(n)}{n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ ont la même nature.

De plus, $n^\alpha \frac{\ln(n)}{n^2} \underset{+\infty}{\to} 0 \iff \alpha < 2$ par croissances comparées. Ainsi $\frac{\ln(n)}{n} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ ; Comme $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

**I.3.12 Proposition**

Si on a $(u_n)$ et $(v_n)$ positives :

1. Si $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.
2. Si $v_n = o_{+\infty}(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

### I.3.13 Remarque

Pour prouver la divergence, les relations entre les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont inversées.

### I.3.14 Exemple

1. Montrer que la série $\sum \frac{n+2}{n^2-4}$ diverge. On calcule un équivalent
2. Montrer que la série $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

   Cette fois on a $\frac{1}{n} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ (calculer le quotient).

   Par l'absurde. Si $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ converge, alors par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{1}{n}$ converge. Contradiction. Donc $\sum \frac{1}{\ln(n)}$ diverge.

### I.3.15 Pour montrer la divergence

On a trois principales méthodes :

— le terme général ne tend même pas vers 0 : divergence grossière.

— on calcule un équivalent qui est un terme général de série divergente.

— $nu_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$, ce qui donne $\frac{1}{n} = o_{+\infty}(u_n)$.

**I.3.16 Théorème (Règle de d'Alembert)**
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ la série peut être divergente ou convergente.

**Preuve.**
On reprend le théorème correspondant dans le chapitre précédent et on applique le théorème de comparaison des séries à termes positifs à $\sum u_n$ et une série géométrique convergente ( pour 1) ou divergente (pour 2).

Pour prouver le point 3, remarquer que les séries de Riemann sont toutes dans le cas $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{+\infty}{\to} 1$ (composition par une puissance FIXÉE). Pourtant, suivant les valeurs de $\alpha$ la série converge ou diverge. ∎

### I.3.17 Utilisation

1. En général, le calcul de la limite du quotient n'est pas aisé, et en pratique vaut souvent 1...
2. Si l'expression de $u_n$ fait apparaître des quantité $n!$ ou $\alpha^n$ en facteur, la règle de d'Alembert peut être efficace.

**I.3.18 Exemple**
Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge. On peut ainsi retrouver un résultat bien connu de croissances comparées sur les suites.

On a bien $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\to} e^{-1} < 1$ (voir le chapitre 0). Ainsi, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

## I.4 Séries alternées

**I.4.1 Théorème (Théorème des séries alternées)**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $(u_n)$ est décroissante et converge vers 0 alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

**Preuve.**
Posons, pour $N \in \mathbb{N}$, $a_N = \sum_{n=0}^{2N} (-1)^n u_n$ et $b_N = \sum_{n=0}^{2N+1} (-1)^n u_n$. Alors

— $b_N - a_N = -u_{2N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ car $u_n \to 0$ (il s'agit de l'opposé d'une suite extraite de $(u_n)$)

— $a_{N+1} - a_N = u_{2N+2} - u_{2N+1} \leqslant 0$ (car $(u_n)$ est décroissante) donc $(a_N)$ est décroissante.

— $b_{N+1} - b_N = -u_{2N+3} + u_{2N+2} \geqslant 0$ donc $(b_N)$ est croissante.

Finalement, $(a_N)$ et $(b_N)$ sont deux suites adjacentes et convergent donc vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. Ainsi les sommes partielles de $\sum (-1)^n u_n$ convergent vers $\ell$ (leurs suites des termes d'indice pairs et impairs le font). ∎

### I.4.2 Remarque

Une suite réelle décroissante et convergeant vers 0 est forcément positive.

**I.4.3 Exemple**
La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. La preuve est simple.

Observons les sous-suites de sommes partielles qui sont adjacentes sur la figure 2

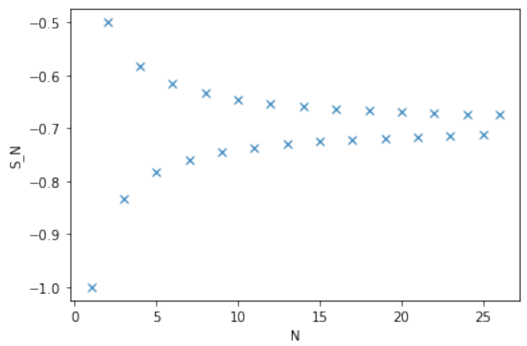


FIGURE 2 – Série harmonique alternée

### I.4.4 Un contre exemple

On peut avoir $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge si la condition de positivité des suites n'est pas respectée.

Pour $n > 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Comme $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ en décroissant, $\sum v_n$ est une série alternée donc converge.
2. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ car $(-1)^n = o_{+\infty}(\sqrt{n})$ (comparaison d'une suite bornée à une suite de limite infinie).
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_{\infty}(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Ainsi $u_n$ est la somme de 3 termes généraux de séries convergentes et d'un terme général de série divergente donc $\sum u_n$ diverge.

**I.4.5 Proposition (Encadrement de la somme)**
Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée comme au théorème précédent. Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$ la $N$ième somme partielle. Alors

$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_{2N+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2N}$$

**Preuve.**
Simple conséquence de la preuve précédente. ■

### I.4.6 Remarque

Les deux résultats précédents s'appliquent également aux séries de la forme $\sum (-1)^{n+1} u_n$ mais les inégalités sont renversées.

L'idée étant que si on termine une somme partielle par un terme positif, alors la valeur est supérieure à la limite.

**I.4.7 Proposition**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, décroissante et convergeant vers 0. Notons $v_n = (-1)^n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n$ le reste de rang $N$ de la série convergente $\sum v_n$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$

1. $R_N$ est du signe de $v_{N+1}$ (son premier terme).
2. $|R_N| \leqslant |v_{N+1}|$

**Preuve.**
En reprenant la preuve du théorème I.4.1, on a pour tout $N$

$$b_N \leqslant \ell \leqslant a_N$$

ou encore

$$0 \leqslant \ell - b_N \leqslant a_N - b_N \text{ et } b_N - a_N \leqslant \ell - a_N \leqslant 0$$

Comme $\ell = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ et avec les notations de la proposition précédente, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}\ R_k = \ell - S_k$$

Ainsi

$$0 \leqslant R_{2N+1} \leqslant u_{2N+1} \text{ et } -u_{2N+1} \leqslant R_{2N} \leqslant 0$$

ce qui prouve le premier point.

De plus,

$$|R_{2N}| = S_{2N} - \ell = a_N - \ell \leqslant a_N - b_N = u_{2N+1} = |v_{2N+1}|$$

et

$$|R_{2N+1}| = \ell - S_{2N+1} = \ell - b_N$$

Comme $\ell \leqslant a_{N+1}$ on obtient $|R_{2N+1}| \leqslant a_{N+1} - b_N = u_{2N+2} = |v_{2N+2}|$ et la seconde propriété est vérifiée pour tous les indices, qu'ils soient pairs ou impairs. ■

## I.5 Application à l'étude de suites

**I.5.1 Proposition**
Soit $(u_n)_n$ une suite. La suite $(u_n - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

**Preuve.**
Il s'agit simplement d'observer que les sommes partielles sont des sommes télescopiques. ■

**I.5.2 Exemple**
$u_n = \ln(\frac{n!e^n}{n^n})$. Convergence ?

Posons, pour $n \geqslant 1$, $v_n = u_n - u_{n-1} = \ln(n) - n\ln(n) + (n-1)\ln(n-1) + 1 = (n-1)\ln(\frac{n-1}{n}) - 1 = (n-1)\ln(1 - \frac{1}{n}) - 1$.

En utilisant $\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$ avec $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ on trouve

$$(n-1)\ln(1-\frac{1}{n}) = (n-1)(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)) = -1 + \frac{1}{2n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Attention au produit $n \times o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}) = o_{+\infty}(\frac{1}{n})$

Ainsi $v_n = \frac{1}{2n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et donc $v_n \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2n}\right)$ et donc $\sum v_n$ diverge par comparaison de séries à termes positifs. On en déduit que $(u_n)$ diverge (et même $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$ car $\sum v_n$ est une série à termes positifs).

**I.5.3 Exemple**
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que $(u_n)$ converge en étudiant la convergence de $\sum (u_n - u_{n-1})$.

Même technique, on calcule un équivalent de $v_n = u_n - u_{n-1}$ en utilisant un développement de $\ln(1+u)$. On trouve un terme général de série de Riemann convergente cette fois-ci.

# II Convergence absolue

## II.1 Convergence d'une série complexe

**II.1.1 Définition**
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

**Explication** On regarde en fait la convergence d'une série positive, pour laquelle tous les théorèmes précédents s'appliquent.

**II.1.2 Théorème**
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. **Si** $\sum u_n$ converge absolument **alors** $\sum u_n$ converge et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

**Preuve.**

— Cas réel.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. C'est à dire que $u_n^+$ est $u_n$ si $u_n \geqslant 0$ et 0 sinon. $u_n^-$ est $|u_n|$ si $u_n \leqslant 0$ et 0 sinon.

Ainsi ces deux nombres sont positifs et on a $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

On pose pour $N \in N$, $S_N = \sum_0^N u_n$ et $S'_n = \sum_0^N |u_n|$.

On sait que $S'_N \underset{+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}^+$. Or $S'_N = \sum_0^N u_n^+ + \sum_0^N u_n^-$. Ces deux dernières sommes sont à termes positifs et majorées par $l$ donc les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.

Ainsi $\sum u_n$ converge par différence de série convergente.

— Cas complexe.

Cette fois on pose $u_n = x_n + iy_n$ et on sait que $\sum |x_n + iy_n|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_n| \leqslant |u_n|$ et $|y_n| \leqslant |u_n|$ donc les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent absolument donc convergent par le point précédent.

Ainsi la combinaison linéaire $\sum (x_n + iy_n)$ converge. ■

### II.1.3 Méthode obligatoire

Pour étudier une série complexe ou une série dont le signe n'est pas constant, on étudiera toujours d'abord la convergence absolue.

**II.1.4 Exemple**
Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n)}{n!}$ converge.

Solution : Majorer la valeur absolue par un terme général (positif) de série convergente.

**II.1.5 Proposition**
Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge.

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ on a de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

**Preuve.**
Pour $z \neq 0$ posons $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right| \geqslant 0$ et $u_n \neq 0$ car $z \neq 0$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} 0$ d'après le chapitre 0 et donc $\sum u_n$ converge d'après la règle de d'Alembert.

Ainsi $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument donc converge. Le cas $z = 0$ est trivial car la suite des sommes partielles est constante égale à 1. ■

### II.1.6 Attention

La réciproque est fausse. Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (en tant que série alternée), mais ne converge pas absolument.

Calculons la somme de cette série. Pour le voir, prenons $x \neq 1$ et notons que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$. En intégrant sur $[-1,0]$ on obtient $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x$. Or $0 \leqslant \frac{|x^{n+1}|}{1-x} \leqslant |x^{n+1}|$ sur l'intervalle $[-1,0]$ et par croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire $0 \leqslant \left|\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Finalement, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

## II.2 Propriétés

**II.2.1 Proposition**
Soient $(u_n),(v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

1. Si $|u_n| \leqslant |v_n|$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ converge absolument si et seulement si $\sum u_n$ converge absolument.

**Preuve.**

1. Simple comparaison de séries à termes positifs.
2. Par définition de la relation de domination, on a aussi $|u_n| = O_{+\infty}(|v_n|)$ et on applique le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
3. Idem
4. Reprendre la preuve du cas positif. ■

**II.2.2 Théorème**
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

**Preuve.**
**Hors programme**

— On considère pour commencer que $(a_n)$ et $(b_n)$ sont des suite réelles positives.

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $A_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n, B_N = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n, C_N = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n = \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Posons de plus $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Alors $C_N = \sum\limits_{k=0}^{N}\sum\limits_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{N}\left(a_k \sum\limits_{i=0}^{N-k} b_i\right)$. Remarquons de plus que $A_N B_N = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \sum\limits_{i=0}^{N} b_i$ (qui est une somme qui contient plus de termes).

Ainsi $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant AB$. La série $\sum c_n$, qui est une série de termes positifs, est majorée et donc converge. On note $C$ sa somme.

Mais on a également

$$C_{2N} = \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) + \sum_{k=N+1}^{2N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) \geqslant \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{N} b_i\right) = A_N B_N$$

la majoration étant valable car on retranche des termes positifs.

Finalement, $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant C_{2N}$ et par passage à la limite ($N \to +\infty$, les limites existent) on obtient bien $C = AB$.

— Revenons maintenant au cas général.

On note en plus, $c'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$, $A'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|, B'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n|, C'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} c'_n$ et $A', B', C'$ les sommes de ces 3 séries ($A', B'$ existent par hypothèse, $C'$ d'après le cas réel positif).

On a, d'après le point précédent, $A'_N B'_N - C'_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.

De plus, $\sum\limits_{n=0}^{N} |c_n| \leqslant C'_N \leqslant C'$ par inégalité triangulaire et donc $\sum c_n$ converge absolument (série à termes positifs majorée) et on note encore $C$ sa somme (l'existence de $C$ n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement).
D'après les calculs du premier point, $A_N B_N - C_N$ est une somme $\sum\limits_{(i,j)\in E} a_i b_j$ où $E \subset [\![0, N]\!]^2$ (qui représente les termes restant après simplification, ie. ceux qui n'apparaissent pas dans $C_N$), on a par inégalité triangulaire,

$$|A_N B_N - C_N| \leqslant \sum_{(i,j)\in E} |a_i b_j| = A'_N B'_N - C'_N.$$

Par encadrement, $A_N B_N - C_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $C = AB$. ∎

### II.2.3 Exemple

Posons pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}\ f(a+b) = f(a)f(b)$.

On a bien ici le produit de deux séries absolument convergentes. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{a^n}{n!}$ et $b_n = \frac{b^n}{n!}$.

Alors la formule du produit de Cauchy donne

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{n!} = \frac{1}{n!}(a+b)^n$$

d'après le théorème du binôme de Newton.

Ainsi $f(a)f(b) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = f(a+b)$.

### II.2.4 Définition

Pour $z \in \mathbb{C}$ quelconque, on définit $\exp(z)$ par $\exp(z) = e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

# Index