Table des matières

I Séries convergentes

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ la **suite** (S_N) définie par
$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$
On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.
Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.
2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.
Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.
3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

Proposition 1
Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de complexes et notons $z_n = x_n + iy_n$ la forme algébrique de chaque terme.
$\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z_n$ converge ssi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n$ convergent. En cas de convergence on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

Définition-Proposition 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
SI $u_n \underset{n\to+\infty}{\nrightarrow} 0$ **ALORS** $\sum u_n$ diverge.
Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 2
Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\ \sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge. Dans ce cas
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire a priori sur $\sum (u_n + v_n)$ (cette dernière série peut être convergente ou divergente, suivant les cas).

I.2 Séries de référence

Proposition 3 (Séries géométriques)
Soit $q \in \mathbb{C}$. $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ converge ssi $|q|<1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Théorème 1
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Théorème 2 (Taylor avec reste intégral)
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

$$\forall x \in I \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Proposition 4 (Série exponentielle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

I.3 Séries à termes positifs

Théorème 3
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.
Dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\left(\left\{\sum\limits_{k=0}^{N} u_n |\ N \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

Théorème 4 (Comparaison des séries à termes positifs)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels **positifs**.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Proposition 5
Si on a (u_n) et (v_n) positives :

1. Si $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.
2. Si $v_n = o_{+\infty}(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge alors $\sum u_n$ diverge.

Théorème 5 (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ la série peut être divergente ou convergente.

I.4 Séries alternées

Théorème 6 (Théorème des séries alternées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
Si (u_n) est décroissante et converge vers 0 alors $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Proposition 6 (Encadrement de la somme)
Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée comme au théorème précédent. Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$ la Nième somme partielle. Alors

$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_{2N+1} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant S_{2N}$$

Proposition 7
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, décroissante et convergeant vers 0. Notons $v_n = (-1)^n u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} v_n$ le reste de rang N de la série convergente $\sum v_n$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$

1. R_N est du signe de v_{N+1} (son premier terme).
2. $|R_N| \leqslant |v_{N+1}|$

I.5 Application à l'étude de suites

Proposition 8
Soit $(u_n)_n$ une suite. $(u_n - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

II Convergence absolue

II.1 Convergence d'une série complexe

Définition 2
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Théorème 7
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. **Si** $\sum u_n$ converge absolument **alors** $\sum u_n$ converge et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Proposition 9
Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge.

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ on a de plus $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

II.2 Propriétés

Proposition 10
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

1. Si $|u_n| \leqslant |v_n|$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge absolument.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum v_n$ converge absolument si et seulement si $\sum u_n$ converge absolument.

Théorème 8
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Définition 3
Pour $z \in \mathbb{C}$ quelconque, on définit $\exp(z)$ par $\exp(z) = e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.