Table des matières

I Trace

I.1 Trace d'une matrice

Définition 1
Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle la trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ le **nombre** $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ qui est la somme de ses coefficients diagonaux.

Proposition 1
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ \ \operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr}(A) + \beta \operatorname{tr}(B)$.

Ainsi la trace est une forme linéaire : $\operatorname{tr} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$

I.2 Trace d'un endomorphisme

Théorème 1 (Trace d'un produit)
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ (remarquer les tailles).

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$

Définition 2
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées.

On dit que A et B sont semblables ssi il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$.

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie pour calculer la matrice. On le note $\operatorname{tr}(f)$.

II Déterminant

II.1 Déterminant de taille n

Définition-Proposition 2
Il existe une unique application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ telle que

1. $\det(I_n) = 1$
2. det est linéaire par rapport à **chaque** colonne.
3. det est anti-symétrique ie change de signe si on échange deux colonne de sa variable.

Proposition 2 (Opérations sur les déterminants)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On fait subir une opération élémentaire sur les colonnes de A et on note A' la matrice obtenue.

1. Si l'opération est $C_i \leftrightarrow C_j$ avec $i \neq j$ alors $\det(A') = -\det(A)$.
2. Si l'opération est $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$ alors $\det(A') = \lambda \det(A)$
3. Si l'opération est $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$ alors $\det(A') = \det(A)$.

Corollaire 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

Théorème 2
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.

Théorème 3
Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

II.2 Propriétés calculatoires

Théorème 4
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Plus généralement, le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants.

Corollaire 2
Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Dans ce cas, on a également
$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \det(A^k) = \det(A)^k$$

Théorème 5
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = \det(A^T)$.

Théorème 6
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Pour $i, j \in [\![1,n]\!]^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ déduite de A en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne.

1. $\det(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $j$ème colonne)
2. $\det(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det A_{i,j}$ (développement par rapport à la $i$ème ligne)

Corollaire 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

II.3 Déterminant et espace vectoriel

Définition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs. Soit $\mathcal{B}$ une base. On appelle déterminant de $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \ldots, u_n))$.

Proposition 3
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs.
$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \text{ ssi } \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$$

Théorème 7
Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n. Toutes les matrices de f (ie dans n'importe quelle base) ont le même déterminant, on le note $\det(f)$ et on l'appelle déterminant de f.

Proposition 4
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension n.

1. $\det(Id_E) = 1$
2. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
3. $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$
4. f est bijective (on dit aussi inversible) ssi $\det(f) \neq 0$ et alors $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.