Devoir surveillé n°1

Durée : 3H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Donner les développements limités suivant (n est un entier naturel non nul)

   (a) $\frac{1}{1-x}$ à l'ordre n

   (b) $\sin(x)$ à l'ordre $2n+1$

   (c) $(1+x)^\alpha$ à l'ordre 3, où $\alpha \in \mathbb{R}$

   (d) $\ln(1+x)$ à l'ordre n.

2. Rappeler la valeur des sommes de séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ en précisant pour quelles valeurs de x ces calculs sont valables.
3. Donner, sans justification, une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
4. On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ie. A est la matrice de f dans la base canonique). Calculer $\ker(f)$ (ou $\ker(A)$).

Exercice 2 (Quelques séries)

1. Développements

   (a) Donner un développement à l'ordre $o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, lorsque $n \to +\infty$ de :

   $$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\ \cos\left(\frac{1}{n}\right),\ \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

   (b) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Donner un développement, au même ordre, de

   $$u_n = an\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b\cos\left(\frac{1}{n}\right) + c\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

   (c) Donner une condition sur a, b, c (autre que $(a, b, c) = (0, 0, 0)$) pour que $\sum u_n$ converge .

2. Étude de restes

   (a) Justifier que $\sum \frac{1}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

   (b) Pour $N \in \mathbb{N}$, Calculer $r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ (le reste de rang N).

   (c) Montrer que $\sum r_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3

Dans cet exercice, on cherche un développement de $\ln(n!)$.

1. Une primitive de ln.

   (a) Montrer que $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln sur un intervalle à préciser.

   (b) Montrer que F est prolongeable par continuité en 0.

   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t$.

2. Montrer **par récurrence** que $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\ \ln(n!) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(k)$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$. Montrer que $\int_{k-1}^{k} \ln(t)\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t$. On donnera, en plus de la preuve, une illustration graphique de ce résultat.
4. En déduire que, pour $n \geqslant 2$, on a $n\ln(n) - n + 1 \leqslant \ln(n!) \leqslant (n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln(2) + 1$.
5. Montrer que $(n+1)\ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$ puis donner un équivalent de $\ln(n!)$.

6. En reprenant le résultat de la question 4 montrer que $\ln(n!) = n\ln(n) - n + o_{+\infty}(n)$.

Exercice 4
On considère la matrice $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, ainsi que $B = I_3 - A$ et $C = 2A - I_3$.

1. Calculer les rangs et les traces de A, B et C.
2. Posons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Trouver S_A l'ensemble des solutions de $AX = 0_{\mathbb{R}^3}$ et S_B l'ensemble des solutions de $BX = 0_{\mathbb{R}^3}$ (d'inconnues X, et sous forme de Vect si besoin...).
   Donner une interprétation géométrique des résultats trouvés : S_A et S_B sont objets classiques en géométrie, dire lesquels.
3. Montrer que S_A et S_B sont perpendiculaires. (sisi, refaire les calculs précédents au besoin).
4. Donner sans calculs supplémentaires les solutions de l'équation $CX = 0_{\mathbb{R}^3}$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $A^2 = A$.
6. Calculer B^2 et C^2 sans utiliser leurs coefficients (une réponse qui fait apparaître un produit de matrices de taille 3 calculé par la méthode habituelle ne sera pas prise en compte).
7. Pour les 5/2 : Donner l'interprétation géométrique des endomorphismes canoniquement associées à A, B et C.

Exercice 5 (Calcul de $\zeta(2)$)
Rappelons que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série convergente. On va chercher à calculer sa somme, généralement notée $\zeta(2)$.

1. Dans cette première question nous allons établir un cas particulier d'un résultat important (appelé lemme de Lebesgue).
   On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$
   (a) Pour $a \in]0, +\infty[$, établir que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(at)\mathrm{d}t = \frac{f(0) - f(\pi)\cos(a\pi)}{a} + \frac{1}{a}\int_0^\pi f'(t)\cos(at)\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que $\frac{f(0)-f(\pi)\cos(a\pi)}{a} \underset{a\to+\infty}{\to} 0$ en majorant sa valeur absolue.
   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(at)\mathrm{d}t \underset{a\to+\infty}{\to} 0$ en montrant que $\displaystyle\left|\int_0^\pi f(t)\sin(at)\mathrm{d}t\right| \underset{a\to+\infty}{\to} 0$.
2. Dans cette deuxième question, nous allons établir par une première méthode une formule de calcul de somme classique.
   (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Établir que $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
   (b) Soit $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$. Calculer $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ où $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Attention à l'indice de départ.
   (c) Rappeler, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ et en déduire la linéarisation de $\cos(a)\sin(b)$ (écrire sous forme de somme, sans produit de fonction trigonométrique).
   (d) Montrer que, pour $x \in]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$
   $$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2})} - \frac{1}{2}$$
3. Voici une deuxième méthode pour ce calcul de somme. Calculer, pour $x \in]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{n\}$
   $$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$$
   en utilisant éventuellement une formule trigonométrique de la question précédente.
4. On considère maintenant la fonction $\varphi : \begin{cases}]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mapsto \frac{x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{cases}$. Calculer, si elle existe, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ et en déduire que φ est prolongeable par continuité en 0. On note encore φ le prolongement par continuité.
5. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-2\pi, 2\pi[\backslash\{0\}$, calculer φ' puis montrer que φ prolongée par continuité est en fait de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2\pi, 2\pi[$.
6. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$
   $$\frac{1}{n^2} = \int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\mathrm{d}t$$

7. Pour $N \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, on pose $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$. Montrer que

$$S_N = \int_0^{\pi} \left(\frac{t}{2\pi} - 1\right) \varphi(t) \sin((N+\frac{1}{2})t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \mathrm{d}t$$

8. En déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.