

Table des matières

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

I.1	Continuité, dérivabilité	1
I.2	Taylor-Young	2

II Courbes paramétrées

II.1	Courbes dans $\mathbb{R}^2$	2
II.2	Domaine d'étude	2
II.3	Tangentes, variations	2
II.4	Tracé	2
II.5	Étude locale	2
II.6	Branches infinies	2

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

I.1 Continuité, dérivabilité

Définition 1

Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}$ et $(y_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $\langle X, Y \rangle$ ou $(X|Y)$) est $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

Définition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall t \in I \mid t - a \mid \leq \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leq \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a .

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I .

Proposition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ (les **fonctions** $f_1, \dots, f_n$ sont appelées applications coordon-

nées). Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $a \in I$ où une borne de I .

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = b \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = b_i$$

Définition 3 (Dérivabilité)

La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole $\lim$ utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien défini dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R}$ - *ev* : on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I , la fonction dérivée f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2

$f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable (en un point ou sur I) ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le

sont et on a alors $f' = \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix}$. f est alors continue.

Proposition 3

L'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^I$ ie pour $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

Proposition 4

Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, $v \in \mathcal{D}(J, I)$ (v est à valeurs dans I).

1. $u \times f$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.
2. Si u ne s'annule pas $\frac{1}{u}f$ est dérivable et $(\frac{1}{u}f)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3. $f \circ v$ est dérivable sur J et $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4. $\langle f, g \rangle$ est dérivable et $(\langle f, g \rangle)' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$
5. (cas $n = 3$) $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
6. (cas $n = 2$) $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

Les règles de calcul habituelle s'appliquent lorsqu'elles ont du sens.

I.2 Taylor-Young

Théorème 1 (Taylor-Young)
 Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a) \underbrace{f'(a)}_{\text{vecteur vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!} \underbrace{f''(a)}_{\text{vecteur accélération}} + \dots$$

$$+ \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

En pratique, on écrit le développement limité coordonnée par coordonnée

II Courbes paramétrées

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

Définition 4
 Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{OM(t)} \end{cases}$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble de tous les points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M).

II.2 Domaine d'étude

II.3 Tangentes, variations

Définition 5
 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{\|f(t) - f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.
 La demi-tangente à gauche de f en t_0 est alors $f(t_0) + \text{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(t_0) + \text{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(t_0)$ est dirigées par les vecteurs $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la tangente à f en t_0 est définie comme étant cette même droite.

Définition 6
 Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

Théorème 2
 Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

II.4 Tracé

II.5 Étude locale

Proposition 5
 Pour étudier l'allure d'une courbe au voisinage d'un point de paramètre t_0 (par exemple un point singulier).

1. Trouver le pus petit entier p tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. C'est un vecteur directeur de la tangente.
2. Trouver le plus petit entier $q > p$ tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ (**on peut utiliser un déterminant**) pour conclure sur l'allure.

II.6 Branches infinies

Définition 7
 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim_{t \rightarrow a} x(t)$ et $\lim_{t \rightarrow a} y(t)$ existent et qu'on est dans l'un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies.
 - (a) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox) .
 - (b) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy) .
 - (c) Si $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
 - i. si $\lim_{t \rightarrow a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f .
 - ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α .

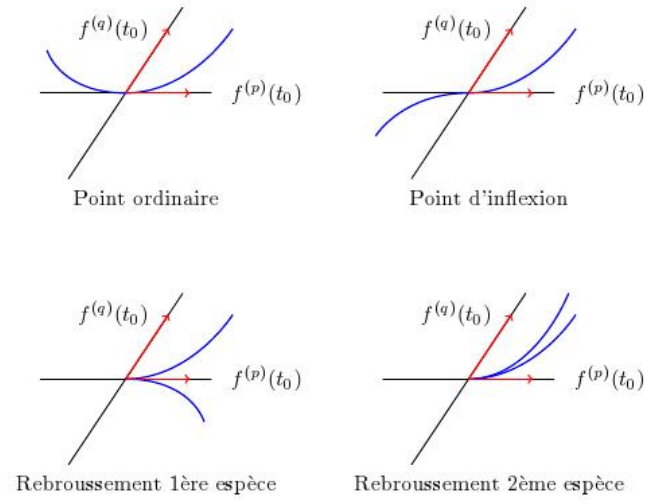


FIGURE 1 – Etude locale

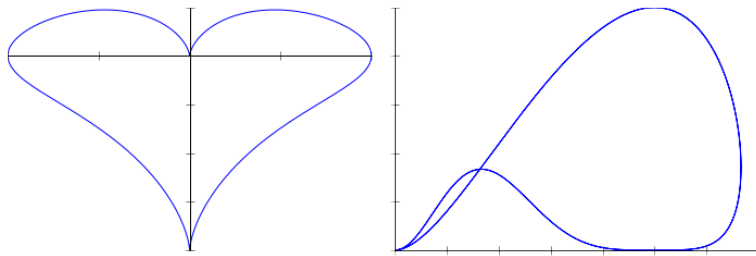


FIGURE 2 – Points de rebroussements

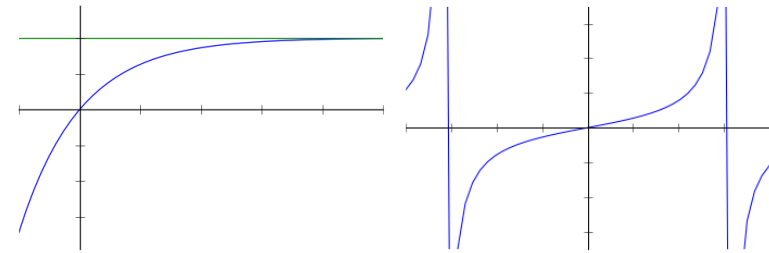


FIGURE 3 – Asymptotes

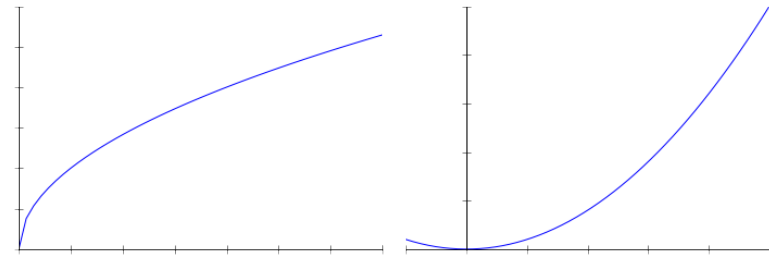


FIGURE 4 – Branches paraboliques

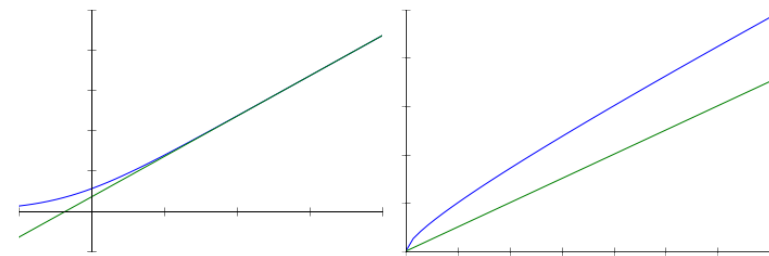


FIGURE 5 – Branches infinies obliques