Table des matières

Dans tout ce cours, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point.

I Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

En pratique, on considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ c'est à dire que l'on prend $n = 2$ ou 3.

I.1 Continuité, dérivabilité

I.1.1 Définition
Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$, sont de coordonnées $(x_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, alors le produit scalaire (canonique) de X et Y (noté $\langle X, Y\rangle$ ou $(X|Y)$) est $< X, Y >= \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$

La norme de X est donnée par $\|X\| = \sqrt{< X, X >} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ et la distance de X à Y est $\|X - Y\|$. On note cette dernière $d(X, Y)$.

I.1.2 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction, $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On dit que f admet b comme limite en a (notations habituelles) ssi

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\alpha > 0 \forall t \in I\ |t - a| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - b\| \leqslant \varepsilon$$

Dans le cas où b existe, elle est unique et vaut $f(a)$. On dit alors que f est continue en a.

f est dite continue sur I si elle est continue en tout point a de I.

I.1.3 Proposition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ (les **fonctions** $f_1, \dots, f_n$ sont appelées applications coordonnées). Soit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $a \in I$ où une borne de I.

$$\lim_{t\to a} f(t) = b \iff \forall i \in [\![1, n]\!]\ \lim_{t\to a} f_i(t) = b_i$$

I.1.4 Remarque

On retrouve le fait (connu) que la continuité des fonctions à valeurs complexes est équivalente à celles des parties réelle et imaginaire. De manière plus générale, f est continue ssi toutes ses applications coordonnées sont continues.

I.1.5 Définition (Dérivabilité)
La définition de la dérivabilité (tout court, à gauche ou à droite) est mot pour mot la même que pour des fonctions à valeurs réelles. Seule change la définition du symbole lim utilisé. Remarquons que les quotients du type $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ sont bien définis car $\frac{1}{t-a}$ est un réel (ce quotient est bien définit dès que f est à valeurs dans un $\mathbb{R} - ev$: on doit pouvoir faire des produits par des réels et une soustraction sur les valeurs de f).

Quand f est dérivable sur I, la fonction dérivée f' est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.1.6 Cinématique

Si la fonction f étudiée représente les coordonnées d'un mobile au cours du temps, alors f' est le vecteur vitesse du mouvement.

I.1.7 Proposition
$f : I \to \mathbb{R}^n$ est dérivable (en un point ou sur I) ssi ses fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_n$ le sont et on a alors $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$. f est alors continue.

I.1.8 Exemple
Montrer que $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Reconnaître la fonction à valeurs complexes associée.

I.1.9 Proposition
L'application $D : f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ dans $(\mathbb{R}^n)^I$ ie pour $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ dérivables et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.

I.1.10 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}^n)$ et $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}), v \in \mathcal{D}(J, I)$ (v est à valeurs dans I).

1. $u \times f$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.
2. Si u ne s'annule pas $\frac{1}{u}f$ est dérivable et $\left(\frac{1}{u}f\right)' = \frac{1}{u^2}(uf' - u'f)$
3. $f \circ v$ est dérivable sur J et $(f \circ v)' = v' \times f' \circ v$
4. $< f, g >$ est dérivable et $(< f, g >)' =< f', g > + < f, g' >$
5. (cas $n = 3$) $f \wedge g$ est dérivable et $(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g'$.
6. (cas $n = 2$) $\det(f, g)$ est dérivable et $(\det(f, g))' = \det(f', g) + \det(f, g')$.

Les règles de calcul habituelle s'appliquent lorsqu'elles ont du sens.

I.1.11 Exemple
Soit $f : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable. Etudier la dérivabilité et la dérivée de $\|f\|$.

I.2 Taylor-Young

I.2.1 Dérivées d'ordre supérieur

On peut étendre de manière similaire (en reprenant les même définitions, puis on constate qu'il suffit de vérifier la propriété sur les fonctions coordonnées) les notions de dérivées d'ordre k, de classe $\mathcal{C}^k$ pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

I.2.2 Combinaison linéaire, produit

Les formules de dérivée k-ième usuelles s'appliquent encore (avec les même preuve) dans le cas d'une combinaison de fonctions $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ et dans le cas du produit uf où $u \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^n)$ (l'idée est qu'il faut s'assurer que les opérations en jeu possèdent un sens : pas de produit de vecteur, on ne somme pas un nombre et un vecteur...)

I.2.3 $o_a(1)$

Dans la suite du chapitre, la notation $o_a(1)$ représente une fonction (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) dont la limite en a est $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$. Il s'agit donc d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont des $o_a(1)$ (celui que l'on connaissait). Plus généralement si g est à valeurs réelles, $o_a(g)$ sera une fonction vectorielle dont toutes les coordonnées sont des $o_a(g)$ au sens habituel.

I.2.4 Théorème (Taylor-Young)
Soit $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $a \in I$ Alors

$$f(t) = f(a) + (t-a) \underbrace{f'(a)}_{\text{vecteur vitesse}} + \frac{(t-a)^2}{2!} \underbrace{f''(a)}_{\text{vecteur accélération}} + \dots + \frac{(t-a)^p}{p!} f^{(p)}(a) + (t-a)^p o_a(1)$$

En pratique, on écrit le développement limité coordonnée par coordonnée

II Courbes paramétrées

II.1 Courbes dans $\mathbb{R}^2$

II.1.1 Définition
Une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ dans $\mathbb{R}^2$ est une fonction $f : \left\{\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \overrightarrow{OM(t)} \end{array}\right.$. Le **support** de la courbe est $f(I)$ (l'ensemble de tous les points $M(t)$, ou encore la trajectoire du point M) .

II.1.2 Exemple
Quel est le support de la courbe $t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ définie sur $[-\pi, \pi]$? Remarquer que la variable t n'apparaît pas graphiquement.

On note souvent $M(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$. Le but n'est pas de tracer la courbe représentative des fonctions x et y mais bien la trajectoire du mobile dont on connaît les coordonnées en fonction du temps.

II.1.3 Courbes représentatives

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ (numérique). On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix}t\\\varphi(t)\end{pmatrix}$.

Le support de f est alors $\{\begin{pmatrix}t\\\varphi(t)\end{pmatrix} \mid t \in I\}$, c'est à dire la courbe représentative de la fonction φ ! De plus, f est régulière.

Question subsidiaire : que dire de la courbe paramétrée $g : t \mapsto \begin{pmatrix}\varphi(t)\\t\end{pmatrix}$?

II.2 Domaine d'étude

Très souvent, il faudra calculer I. Tout comme pour les fonctions numériques paires, impaires ou périodiques, on peut parfois réduire l'étude à un intervalle plus petit. Ceci correspond à une certaine symétrie du support de la courbe.

II.2.1 Résumé des symétries connues

Notons $M : \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et M' un autre point.

Coordonnées de M'	M' est le
$\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à (Oy)
$\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à (Ox)
$\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à au point O
$\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à $\mathcal{D} : y = x$
$\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$	symétrique de M par rapport à $\mathcal{D} : y = -x$
$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	translaté de M par le vecteur $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$

En règle générale, un schéma représentant les points M et M' permet de retrouver la symétrie.

II.2.2 Réduction du domaine d'étude

Notons $M(t)$ un point de la courbe $f : D \to \mathbb{R}^2$. Le principe de la réduction de domaine d'étude est de calculer les coordonnées de $M(\varphi(t))$ pour une fonction φ bien choisie de telle manière que $M(\varphi(t))$ est l'un des symétrique vu au point précédent. Si c'est le cas, on peut réduire le domaine d'étude puis compléter le tracer par la symétrie trouvée.

Donnons une liste non exhaustive des transformations classiques φ.

Forme de D	Point à calculer	Domaine réduit
Quelconque	$M(t+T)$	sur une période, souvent $D \cap [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
centré en 0	$M(-t)$	$D \cap [0, +\infty[$
$[0, a]$	$M(a-t)$	$[0, \frac{a}{2}]$
$]0, +\infty[$	$M(\frac{1}{t})$	$]0, 1]$

II.2.3 Exemple

Donnons un domaine d'étude de $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\\sin(2t)\end{pmatrix} = M(t)$.

f est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

— $M(t+2\pi) = M(t)$ (ce n'est même pas une transformation, on retrouve exactement le même point).
  Ainsi on peut étudier f sur $[-\pi, \pi]$ pour obtenir le support complet.

— $M(-t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\-\sin(2t)\end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à (Ox). Ainsi on étudie f sur $[0, \pi]$ et on complétera le tracé par symétrie par rapport à (Ox).

— $M(\pi-t) = \begin{pmatrix}-\cos(t)\\\sin(2\pi-2t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(t)\\-\sin(2t)\end{pmatrix}$ est le symétrique de M par rapport à O.
  On étudie f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

— Le calcul de $M(\frac{\pi}{2}-t)$ n'aboutit par à une des formes connues. On arrête la réduction de domaine.

II.3 Tangentes, variations

Maintenant que nous disposons d'un domaine d'étude raisonnable, il nous faut tracer l'allure du support. Pour cela nous allons déterminer si la courbe se “dirige” vers la gauche ou la droite (x est décroissante ou croissante), vers le haut ou le bas (variations de y).

II.3.1 Etude des variations

Il s'agit là simplement de donner un tableau de variations complet pour x et y, tout en notant les points d'annulation des dérivées (on repère ainsi les éventuels points singuliers).

II.3.2 Cordes

La corde passant par les points (distincts) $M(t)$ et $M(a)$ est dirigée par le vecteur unitaire $\frac{\overrightarrow{M(a)M(t)}}{\|\overrightarrow{M(a)M(t)}\|}$

II.3.3 Définition
Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On dit que f possède une demi tangente à gauche (resp. à droite) en t_0 ssi $\lim\limits_{t \to t_0^-} \frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|}$ existe (resp. limite à droite). Notons $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ ces limites quand elles existent.

La demi-tangente à gauche de f en t_0 est alors $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_-)$ et la demi-tangente à droite est $f(t_0) + \mathrm{Vect}(\vec{u}_+)$, c'est à dire les droites passant par le point $f(t_0)$ est dirigées par les vecteurs $\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$. Si ces droites sont confondues ($\vec{u}_-$ et $\vec{u}_+$ sont colinéaires) alors la tangente à f en t_0 est définie comme étant cette même droite.

II.3.4 Définition
Soit f une courbe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ et $t_0 \in I$. Si $f'(t_0) \neq \vec{0}$, on dit que le point t_0 est régulier, sinon on dit qu'il est singulier. Si tous les points de f sont régulier, f est dite régulière.

II.3.5 Théorème
Si t_0 est un point régulier de la courbe f alors f possède une tangente en t_0 dirigée par $f'(t_0)$.

Preuve.
D'après le théorème de Taylor-Young, et par continuité de la norme, $\|f(t)-f(t_0)\| \underset{t_0}{\sim} |t-t_0|\|f'(t_0)\| \neq 0$. Ainsi $\frac{f(t)-f(t_0)}{\|f(t)-f(t_0)\|} \underset{t_0}{\sim} \frac{1}{\|f'(t_0)\|}\frac{f(t)-f(t_0)}{|t-t_0|} \underset{t_0}{\to} \pm\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$. ■

II.3.6 Exemple
Reprenons $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$.

f est clairement dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car ses deux fonctions coordonnées le sont. De plus, pour $t \in [0, \frac{pi}{2}]$, on a

$$x'(t) = -\sin(t) \text{ et } y'(t) = 2\cos(2t)$$

On en déduit le tableau de variations.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0		$-$		
$x(t)$	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0
$y(t)$	0	↗	1	↘	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

On remarque qu'en $t = 0$, la tangente est dirigée par $f'(0) = \begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}$: elle est verticale.
De plus, en $t = \frac{\pi}{4}$ la tangente est dirigée par $f'(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$: elle est horizontale.

Finalement, en $t = \frac{\pi}{2}$, la tangente est dirigée par $f'(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix}-1\\ -2\end{pmatrix}$.

II.4 Tracé

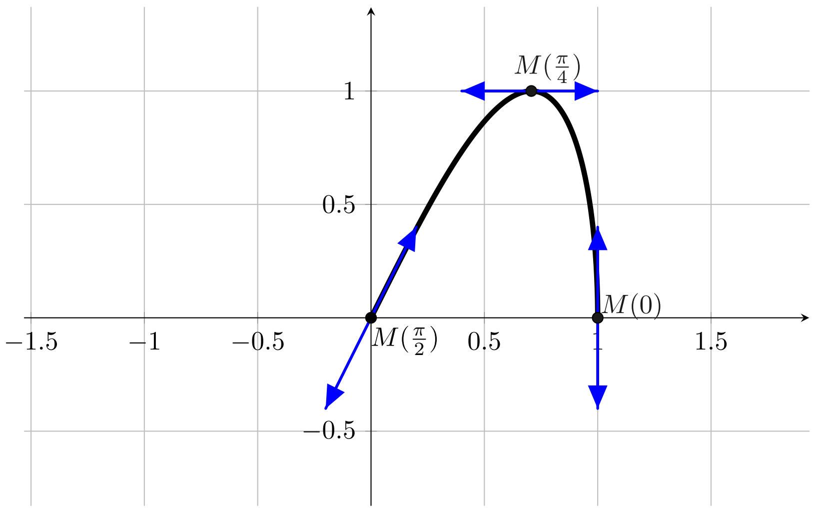
II.4.1 Méthode

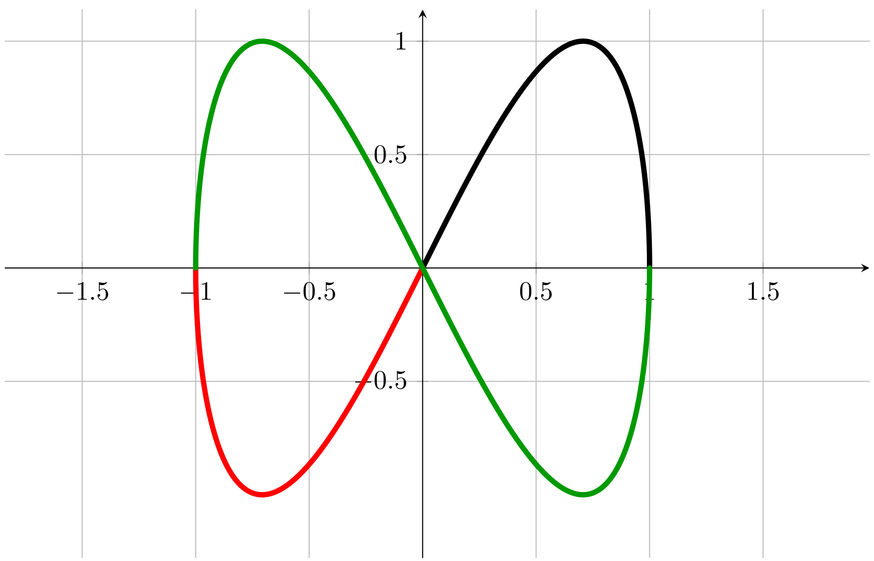
1. Placer tous les points étudiés dans la phase précédente, ainsi que les tangentes en ces points.
2. Tracer la courbe passant par ces points, tangente à ses tangentes. Le tracé doit respecter les variations.
3. Effectuer les symétries dans l'ordre inverse de leur découverte.

II.4.2 Exemple

Toujours pour la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}$. On commence par tracer sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On place ensuite les symétrique des 3 points et 3 tangentes par rapport à O pour obtenir le tracé sur $[0, \pi]$ (partie noire + rouge sur la figure). Ensuite on place les symétriques par rapport à (Ox) des 5 points et 5 tangentes pour obtenir le tracé final sur $[-\pi, \pi]$.





II.5 Étude locale

Le cadre ici est d'étudier plus particulièrement l'allure de la courbe au voisinage du point $M(t_0)$ où t_0 est fixé. En particulier, on pourra trouver la tangente dans les cas des points singuliers.

II.5.1 Continuer à dériver

Le raisonnement du théorème II.3.4 s'étend sans difficulté cas le cas où $f'(t_0) = 0$ mais $f^{(p)}(t_0) \neq 0$ pour un $p > 1$ (que l'on prend le plus petit possible). Allons plus loin et trouvons de plus $q > p$ le plus petit entier tel que $\vec{u}_p = f^{(p)}(t_0), \vec{u}_q = f^{(q)}(t_0)$ est libre.

Alors dans le repère $\mathcal{R}' = (M(t_0), \vec{u}_p, \vec{u}_q)$, les coordonnées de $M(t)$ (notées $\alpha(t)$ et $\beta(t)$) vérifient

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} + o_{t_0}((t-t_0)^p) \\ \beta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} + o_{t_0}((t-t_0)^q) \end{cases}$$

c'est à dire que la courbe "suit" les directions d'abord de sa tangente (de direction $\vec{u}_p$) puis de $\vec{u}_q$.

Plus précisément, dans $\mathcal{R}'$ on a plus sieurs cas :

— Si p est pair, alors α ne change pas de signe et donc on reste toujours du même côté de l'axe dirigé par $\vec{u}_q$.

— Si q est pair, alors β ne change pas de signe et donc la courbe reste toujours du même côté de sa tangente (qui est l'axe dirigé par $\vec{u}_p$).

— on adapte les raisonnements dans les cas impairs pour trouver les 4 cas du points suivant.

II.5.2 Proposition
Pour étudier l'allure d'une courbe au voisinage d'un point de paramètre t_0 (par exemple un point singulier).

1. Trouver le pus petit entier p tel que $f^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$. C'est un vecteur directeur de la tangente.
2. Trouver le plus petit entier $q > p$ tel que $f^{(q)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f^{(p)}(t_0)$ (on peut utiliser un déterminant) pour conclure sur l'allure.

Suivant la parité de p et q on obtient les 4 cas de la figure 1. p impair correspond à la première ligne, p paire à la seconde.

q pair correspond aux cas 1 et 4 (sur la diagonale).

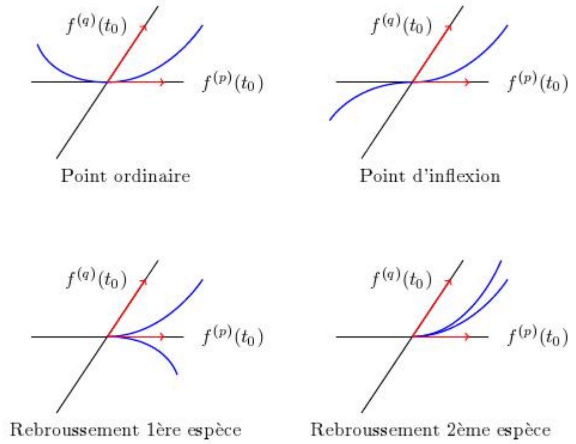


FIGURE 1 – Étude locale

II.5.3 Cas p=1, q=2

La vitesse et l'accélération ne sont pas colinéaires. C'est le cas le plus classique. Le point est dit **birégulier**. Dans ce cas la vitesse donne la direction de la tangente et l'accélération le sens de “courbure”.

II.5.4 En pratique

On peut tout à fait utiliser un développement limité de x et y pour obtenir des vecteurs proportionnels aux dérivées successives.

II.5.5 Exemple

Etudier la tangente au point de paramètre 0 de $t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Deux méthodes pour étudier l'allure de la courbe en $t = 0$.

1. On a $x'(0) = y'(0) = 0$ et donc il s'agit d'un point singulier. De plus $x''(0) = 1$ et $y''(0) = 0$. Ainsi $f''(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dirige la tangente au point de paramètre 0. On a ici p = 2.

   Pour finir, $x^{(3)}(0) = 0$ et $y^{(3)}(0) = 6$ et donc $f^{(3)}(0)$ n'est pas colinéaire à $f''(0)$. C'est à dire que q = 3. On a donc ici un point de rebroussement de première espèce.

2. Donnons des développements limités des fonctions x et y.

$$\begin{array}{llll} x(t) = & 1 + 0t & +\frac{1}{2}t^2 + 0t^3 & +o_0(t^3) \\ y(t) = & 0 + 0t & +0t^2 + 1t^3 & +o_0(t^3) \end{array}$$

   Ainsi, comme f est de classe $\mathcal{C}^3$ au moins, on a $f'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (la colonne en facteur de t), $\frac{1}{2!}f''(0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ (la colonne en facteur de t^2) et $\frac{1}{3!} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (facteur de t^3) et on conclut comme dans la méthode précédente.

Exercice 1
Trouver en fonction de $k \in \mathbb{R}$ les éventuels points singuliers de $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) + 2k\cos(\frac{t}{2}) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

II.6 Branches infinies

II.6.1 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $a \in \bar{I}$. On dit que f possède une branche infinie au voisinage de a si $\lim\limits_{t\to a} x(t)$ et $\lim\limits_{t\to a} y(t)$ existent et qu'on est dans l'un des cas suivant

1. Une des limite est infinie et l'autre finie : on obtient une asymptote qui est horizontale (lorsque seulement y tend vers l'infini) ou verticale (lorsque seulement x tend vers l'infini).
2. Ces deux limites sont infinies.
   (a) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Ox).
   (b) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ alors on dit que f possède une branche parabolique de direction (Oy).
   (c) Si $\lim\limits_{t\to a} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}^*$ est un réel **non nul**, il y a deux cas
      i. si $\lim\limits_{t\to a} y(t) - \alpha x(t) = \beta \in \mathbb{R}$ alors on dit que la droite $\mathcal{D} : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à f.
      ii. sinon on dit que f admet une branche parabolique de pente α.

II.6.2 Illustration

II.6.3 Exemple

Etudier les branches infinies de $x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$.
Passons sur l'étude des variations et des limites qui ne présente pas de difficulté particulières. On trouve le tableau suivant.

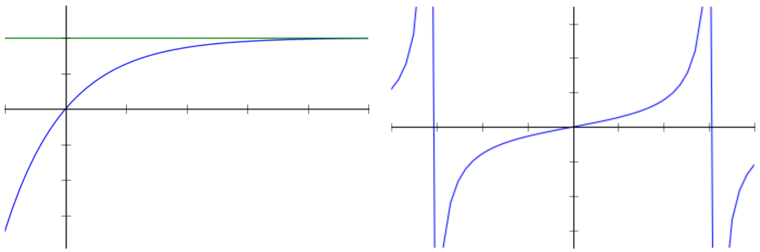


Figure 2 – Asymptotes

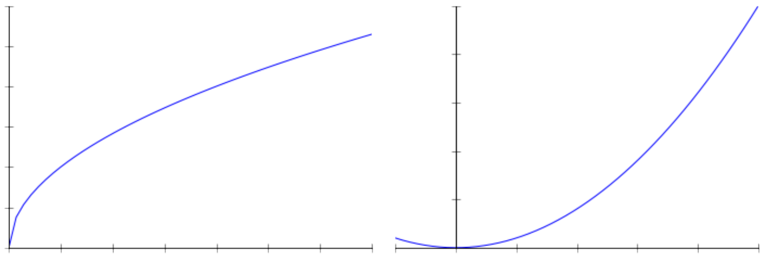


Figure 3 – Branches paraboliques

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$ ‖ $\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0
$y'(t)$		$-$	‖		$-$		‖		$-$		

— Lorsque $t \to -\infty$ on a $x(t) \underset{t\to-\infty}{\to} +\infty$ et $y(t) \underset{-\infty}{\to} 0$. Ainsi on observe une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque $t \to -\infty$.

— Le raisonnement et le résultat sont exactement les mêmes lorsque $t \to +\infty$.

— Lorsque $t \to -1$ on a $x(t) \underset{t\to-1}{\to} -\frac{1}{2}$ et $y(t) \underset{t\to-1}{\to} \pm\infty$ (suivant que la limite est calculée en -1^- ou -1^+).
Ainsi, on observe une asymptote verticale d'équation $x = -\frac{1}{2}$ lorsque $t \to 1 - 1^-$ et lorsque $t \to -1^+$

— Étudions la branche infinie lorsque $t \to 1$. On a cette fois $x(t) \underset{t\to1^+}{\to} +\infty$ et $y(t) \underset{t\to1^+}{\to}$.
Nous devons donc étudier l'éventuelle limite en 1^+ de $\frac{y(t)}{x(t)}$. Soit $t > 1$. Alors

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(t-1)}{(t^2-1)t^2} = \frac{1}{t(t+1)} \underset{t\to1}{\to} \frac{1}{2}$$

Remarquons que la limite est la même en 1^+ et 1^-. On trouve une limite finie α, étude de $y(t) - \alpha x(t)$.
Maintenant

$$y(t) - \frac{1}{2}x(t) = \frac{2t - t^2(t+1)}{2(t^2-1)} = -\frac{t(t^2+t-2)}{2(t-1)(t+1)} = -\frac{t(t+2)}{2(t+1)} \underset{t\to1}{\to} -\frac{3}{4}$$

On a factorisé le polynôme $t^2 + t - 2$ en remarquant que 1 est racine.
Finalement, lorsque $t \to 1$ on observe une asymptote oblique d'équation $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

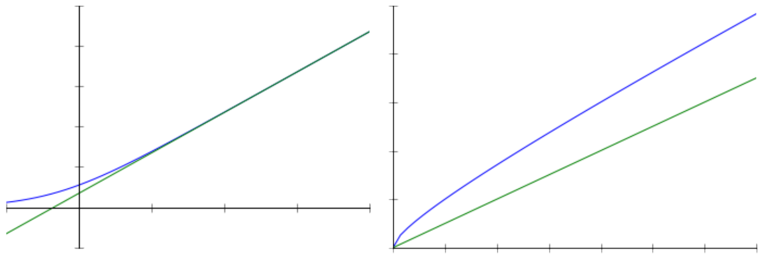


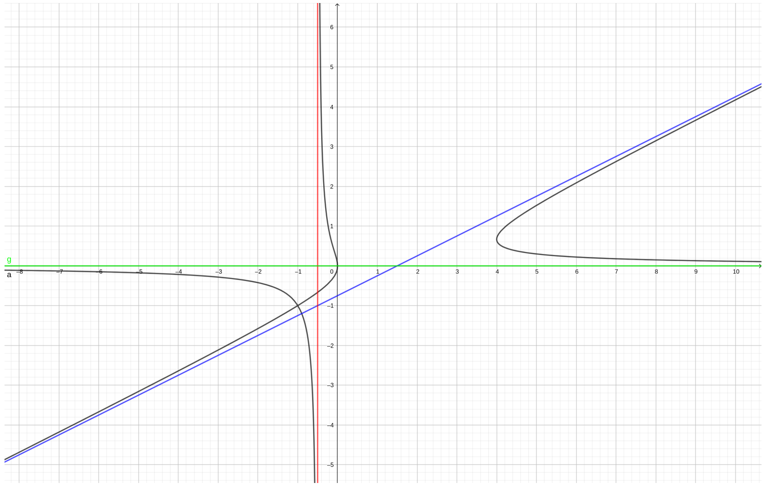
Figure 4 – Asymptote et branche parabolique obliques

Sur le tracé qui suit, on a représenté la courbe en noir, l'asymptote verticale en rouge, l'asymptote horizontale en vert et l'asymptote oblique en bleu. Plusieurs remarques.

— La partie de courbe pour $t \in]-\infty, -1[$ ressemble à une branche d'hyperbole.

— Pour $t \in]-1, 1[$, on repart du "haut" de l'asymptote verticale et on observe une tangente verticale à l'origine en $t = 0$. Le courbe "repart" ensuite vers le bas de l'asymptote oblique.

— Pour $t \in]1, +\infty[$, la courbe "arrive" de l'asymptote oblique, puis on observe une antre tangente verticale en $t = 2$ et enfin l'asymptote horizontale.



Exercice 2
Sur le tracé précédent, on observe un point double, par lequel la courbe passe deux fois. Chercher $t_1 < t_2$ tels que $M(t_1) = M(t_2)$. D'après l'analyse du tracé, on doit trouver $t_1 \in]-\infty, -1[$ et $t_2 \in]-1, 1[$.

Indication : faire apparaître la quantité $t_1 - t_2$ ou son opposé en facteur pour pouvoir simplifier