Devoir maison n°3

A rendre le 03/10/2023

Exercice 1
Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A_{i,j}$ (pour $i, j \in [\![1, n]\!]$) la matrice carrée de taille $n-1$ obtenue en supprimant la $i$ème ligne et la $j$ème colonne de A.

1. Un exemple numérique. Dans cette question, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
   (a) Calculer $\det(A)$
   (b) On pose $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par $b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant 3$. Calculer la matrice B.
   (c) Calculer $A \times B^T$. Qu'en déduire pour A ?
2. Passons au cas général.
   (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de coefficients notés $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$. Rappeler l'expression de $c_{i,j}$ où $C = AB$.
   (b) On note $b'_{i,j}$ les coefficients de B^T. Exprimer $b'_{i,j}$ en fonction d'un coefficient de B.
   (c) On définit maintenant la matrice B comme dans la première question :
   $$b_{i,j} = (-1)^{i+j}\det(A_{i,j})$$
   et la matrice C par $C = AB^T$.
   Calculer $c_{i,j}$.
   (d) Montrer que $c_{i,i} = \det(A)$ en reconnaissant un développement par rapport à une ligne ou une colonne.
   (e) Montrer que pour $i \neq j$, on a $c_{i,j} = 0$.

Indications

1. (a) On peut trouver facilement un déterminant triangulaire.
   (b) Cette question n'est pas difficile mais demande du soin.
   (c) On doit trouver $\det(A) \times I_3$
2. (a)
   (b)
   (c) Faire attention à l'application des formules précédentes. On pourra utiliser la notation $b'_{i,j}$.
   (d) Quel est l'indice constant ? Celui qui varie ? Est-ce un développement par rapport à une ligne ou une colonne ?
   (e) On pourra reconnaître un développement d'un déterminant d'une matrice qui est clairement nul : nous avons plusieurs moyens de prouver qu'un déterminant est nul.