Table des matières

I Sommes et produits d'espaces **1**
- I.1 Produit d'espaces vectoriels . . . 1
- I.2 Espaces supplémentaires . . . 1
- I.3 Somme et somme directe . . . 2

II Espaces stables **3**
- II.1 Endomorphisme induit . . . 3
- II.2 En dimension finie . . . 3

III Hyperplans et équations **3**
- III.1 Hyperplans ($\star$) . . . 3
- III.2 Systèmes d'équations . . . 4

I Sommes et produits d'espaces

I.1 Produit d'espaces vectoriels

Proposition 1 (Espace produit)
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Les opérations suivantes font de $E \times F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

1. $\forall (x, y), (x', y') \in E \times F \ (x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.
2. $\forall (x, y) \in E \times F \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Corollaire 1
Si $E_1 \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la loi produit définie précédemment (c'est à dire qu'on somme composante par composante les n-uplets et qu'on les multiplie toutes par $\lambda \in \mathbb{K}$).

Rappelons que le produit cartésien d'ensembles est associatif, ce qui justifie la notation $\prod\limits_{i=1}^{n}$

Proposition 2
Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Corollaire 2
Soient $E_1 \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et

$$\dim \left(\prod_{i=1}^{n} E_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

I.2 Espaces supplémentaires

Définition 1
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F+G = \{x_F + x_G | \ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$.

C'est un espace vectoriel qui contient F et G, et on a même $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

Définition 2
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi

$$\forall x \in E \ \exists! \ (x_F, x_G) \in F \times G \ x = x_F + x_G$$

Avec ces notations, x_F est appelé le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

Lemme 1
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E.

$$F \oplus G = E \iff \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (x_F, x_G) & \mapsto & x_F + x_G \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme.}$$

Corollaire 3
En dimension finie, SI $E = F \oplus G$ Alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Proposition 3
Avec les notations de la définition,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases} .$$

Théorème 1 (Théorème de la base adaptée)
Soit E un espace de dimension fini et F, G des sous-espaces de E.

$E = F \oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F \oplus G$.

Proposition 4 (Caractérisation des supplémentaires)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces de E.

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff \begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \\ &\iff \text{la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.} \end{aligned}$$

Définition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array} \right.$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

Théorème 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit p le projecteur sur F de direction G. On a alors :
   — $p \in \mathcal{L}(E)$
   — $p^2 = p$
   — $\ker p = G$
   — $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$
2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$ (et on a donc $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$).

Théorème 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors :
   — $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$
   — $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$
   — $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

I.3 Somme et somme directe

Définition-Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est $\sum_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \cdots + u_p |\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est une somme **directe** et on note $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \cdots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!]\ u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

Lemme 2
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E et notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \iff \psi : \begin{cases} \prod_{i=1}^{p} F_i & \to & F \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

Théorème 4
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i \; u_1 + \dots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0_E.$$

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Définition-Proposition 2 (Théorème de la base adaptée)
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimensions finies. Notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.
Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.

II Espaces stables

II.1 Endomorphisme induit

Définition 4
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

Proposition 5
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.
Si $f \circ g = g \circ f$ alors $\ker(f)$ est stable par g et $\ker(g)$ est stable par f

II.2 En dimension finie

Théorème 5
Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$

F est stable par f ssi $\mathrm{Mat}_B(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où

- $A \in M_p(\mathbb{K})$ (et on a alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_{|F})$)
- $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$
- $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$
- 0 représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$

III Hyperplans et équations

III.1 Hyperplans ($\star$)

Définition-Proposition 3
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit H un sous-espace de E.

$$\dim(H) = n - 1 \iff \text{ il existe un supplémentaire de H qui soit une droite.}$$

Dans chacun de ces deux cas, on dit que H est un hyperplan.

Lemme 3
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ deux formes linéaires.
$\ker(f) = \ker(g)$ ssi f et g sont proportionnelles ssi il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$.

Théorème 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$) appartient à H ssi $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$.

Toutes les autres équations de H dans $\mathcal{B}$ sont proportionnelles à celle-ci.

III.2 Systèmes d'équations

Théorème 7
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n - p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n - p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).