Table des matières

I Sommes et produits d'espaces

I.1 Produit d'espaces vectoriels

I.1.1 Proposition (Espace produit)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Les opérations suivantes font de $E \times F$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel :

1. $\forall (x,y),(x',y') \in E \times F \ (x,y)+(x',y') = (x+x', y+y')$.
2. $\forall (x,y) \in E \times F \forall \lambda \in \mathbb{K} \ \lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Preuve.
On prouve que cette loi $+$ possède les bonnes propriétés dans $E \times F$ très facilement.
Soient $(x,y),(x',y') \in E \times F$ Soient maintenant $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

— $\lambda.((x,y)+(x',y')) = \lambda.(x+x', y+y') = (\lambda.(x+x'), \lambda.(y+y')) = (\lambda.x + \lambda.x', \lambda.y + \lambda.y') = (\lambda.x, \lambda.y) + (\lambda.x', \lambda.y') = \lambda.(x,y) + \lambda.(x',y')$

— $(\lambda+\mu).(x,y) = ...$

— $\lambda.(\mu.(x,y)) = ...$

— $1.(x,y) = ...$ ∎

I.1.2 Corollaire

Si $E_1 \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour la loi produit définie précédemment (c'est à dire qu'on somme composante par composante les n-uplets et qu'on les multiplie toutes par $\lambda \in \mathbb{K}$).

Rappelons que le produit cartésien d'ensembles est associatif, ce qui justifie la notation $\prod_{i=1}^{n}$

I.1.3 Exemple

Les exemples les plus classiques sont $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}^n$.

I.1.4 Proposition

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $E \times F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Preuve.
Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. On considère la famille

$$\mathcal{B} = ((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p)))$$

. On va montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $E \times F$.

— Méthode 1.
Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ des scalaires.
Supposons $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{p} \beta_i (0_E, f_i) = (0_E, 0_F)$.
Le membre de gauche est, par définition des opérations dans $E \times F$, $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right.$
Par unicité des composantes on a donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0_E$ et $\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i = 0_F$. Comme les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ sont libres on en déduit que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$ et $\beta_1, \dots, \beta_p = 0_{\mathbb{K}}$ ce qui prouve bien la liberté de $\mathcal{B}$
Montrons maintenant que $\mathcal{B}$ est génératrice de $E \times F$. On ne peut pas utiliser un argument de cardinal et de dimension, car on chercher justement à calculer la dimension de $E \times F$...
Soit $(x,y) = E \times F$. Comme $x \in E$ et que $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E on peut écrire $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ pour certains scalaires $x_1, \dots, x_n$.

De même $y = \sum_{i=1}^{p} y_i f_i$ pour certains scalaires $y_1, \dots, y_p$. Alors on a directement

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i(e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{p} y_i(0_E, f_i)$$

ce qui prouve que $\mathcal{B}$ est génératrice de $E \times F$.

Finalement $\dim(E \times F) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n + p = \dim(E) + \dim(F)$.

— Méthode 2.

Il suffit de montrer que l'application (clairement linéaire)

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^{n+p} & \to & E \times F \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(e_i, 0_F) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i(0_E, f_i) \end{array} \right.$$

est bijective. Or l'application qui à $(x,y) \in E \times F$ associe la famille des coordonnées de x (dans $(e_1, \dots, e_n)$) suivie de la famille des coordonnées de y (dans $(f_1, \dots, f_p)$) est clairement la réciproque de φ.

Ceci prouve que $E \times F$ est de dimension finie et $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

■

I.1.5 Corollaire

Soient $E_1 \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est de dimension finie et

$$\dim\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_i)$$

Preuve.

Le cas $n = 1$ est trivial et le cas $n = 2$ est le résultat précédent.

L'associativité du produit cartésien et de la somme d'entiers prouve immédiatement l'hérédité d'une récurrence sur n et on conclut par le principe de récurrence.■

I.1.6 Exemple

$\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

I.2 Espaces supplémentaires

I.2.1 Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces. La somme de F et G est $F + G = \{x_F + x_G |\ x_F \in F \text{ et } x_G \in G\}$.

C'est un espace vectoriel qui contient F et G, et on a même $F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$.

I.2.2 Famille génératrice

Si on dispose d'une famille (u_i) génératrice de F et d'une famille (v_i) génératrice de G, alors la concaténation de ces familles engendre $F + G$.

Ainsi, en dimension finie,

$$\dim(F+G) \leqslant \dim(F) + \dim(G),\ \dim(F+G) \geqslant \dim(F),\ \dim(F,+G) \geqslant \dim(G)$$

I.2.3 Exemple

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

Donner une base de $P_1 + P_2$ où $P_1 : x - y + 2z = 0$ et $P_2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix})$.

On a $P_1 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix})$ (en résolvant le système à 3 inconnue et une seule équation, on a posé y, z comme paramètres).

Alors $P_1 + P_2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix})$ (cette famille génératrice ne peut pas être libre car elle est de cardinal 4 dans un espace de dimension 3). On remarque la présence de deux fois le même vecteur. Alors

$$P_1 + P_2 = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix})$$

il reste à prouver que cette dernière famille est libre. Considérons sa matrice dans la base canonique, $M = \begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Par l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3$ puis développement par rapport à la première ligne,

$$\det(M) = +1 \times \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1$$

et donc $M \in GL_3(\mathbb{R})$. Ainsi la famille de ses colonnes forme une base de $\mathbb{R}^3$ donc est libre et est une base de $P_1 + P_2$.

Deuxième méthode : $P_1 \subset P_1 + P_2 \subset \mathbb{R}^3$ donc $2 \leqslant \dim(P_1 + P_2) \leqslant 3$. De plus, $\dim(P_1 + P_2) = 2$ ssi $P_1 + P_2 = P_1$ (car P_1 est un sous espace de $P_1 + P_2$). Or $\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \notin P_1$

(il ne vérifie pas l'équation) et donc $P_1 + P_2 \neq P_1$ et la seule possibilité restante est $\dim(P_1 + P_2) = 3$ et donc $P_1 + P_2 = \mathbb{R}^3$.

Finalement une base de $P_1 + P_2$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

I.2.4 Définition
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E.

On dit que F et G sont supplémentaires dans E et on note $E = F \oplus G$ ssi

$$\forall x \in E\ \exists!\ (x_F, x_G) \in F \times G\ x = x_F + x_G$$

Avec ces notations, x_F est appelé le projeté de x sur F dans la direction G (ou parallèlement à G) et x_G le projeté de x sur G dans la direction F.

I.2.5 Lemme
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces de E.

$$F \oplus G = E \iff \varphi : \begin{cases} F \times G & \to & E \\ (x_F, x_G) & \mapsto & x_F + x_G \end{cases} \text{ est un isomorphisme.}$$

Preuve.
$\varphi \in \mathcal{L}(F \times G, E)$ facilement.

La définition donnée est exactement là même que celle de la bijectivité de φ (pour tout élément de l'ensemble d'arrivé il existe un unique antécédent par φ.) ■

I.2.6 Corollaire
En dimension finie, SI $E = F \oplus G$ Alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Preuve.
Lorsque φ est un isomorphisme entre espaces de dimensions finies, on a

$$\dim(F \times G) = \dim(E).$$

I.2.7 Proposition
Avec les notations de la définition,

$$E = F \oplus G \iff \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}.$$

Preuve.
Par définition, $E = F + G$ ssi l'application φ est surjective car $\mathrm{Im}(\varphi) = F + G$.

Montrons que φ est injective ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Supposons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $(x_F, x_G) \in F \times G$. On a $(x_F, x_G) \in \ker(\varphi) \iff x_F = -x_G$ mais alors x_F, x_G sont alors des éléments de $F \cap G$ et donc $x_F = x_G = 0_E$. φ est donc injective.

Supposons réciproquement que φ est injective. Soit $x \in F \cap G$ (on montre que $x = 0_E$). On a $\varphi(x, 0_E) = x = \varphi(0_E, x)$ (calcul licite car x est à la fois dans F et G). Or φ est injective et donc $x = 0_E$ et $0_E = x$. Finalement, on a bien $F \cap G = \{0_E\}$. ■

I.2.8 Théorème (Théorème de la base adaptée)
Soit E un espace de dimension fini et F, G des sous-espaces de E.

$E = F \oplus G$ ssi la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E. On dit que la base obtenue (par concaténation) est **adaptée** à la somme $F \oplus G$.

Preuve.
Soient $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_r)$ une base de G.

Alors $\mathcal{B} = ((f_1, 0_E), \dots, (f_p, 0_E), (0_E, g_1), \dots, (0_E, g_r))$ est une base de $F \times G$ d'après la preuve du théorème I.1.4.

On sait que l'application linéaire φ est bijective ssi $\varphi(B)$ est une base de E. Comme $\varphi(\mathcal{B}) = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots g_r)$ le théorème est une conséquence directe de I.2.5. ■

I.2.9 Proposition (Caractérisation des supplémentaires)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F, G deux sous-espaces de E.

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff \begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \\ &\iff \text{la concaténation d'une base de F et d'une base de G est une base de E.} \end{aligned}$$

Preuve.
Il s'agit d'applique le théorème de Grassman pour les deux premiers points. ■

I.2.10 Exemple
Dans $\mathbb{R}^2$ puis dans $\mathbb{R}^3$ trouver les espaces qui sont supplémentaires.

Dans $\mathbb{R}^2$, on a $F \oplus G = E$ ssi $\{F, G\} = \{\{0_{\mathbb{R}^2}\}, \mathbb{R}^2\}$ ou F, G sont deux droites non confondues.

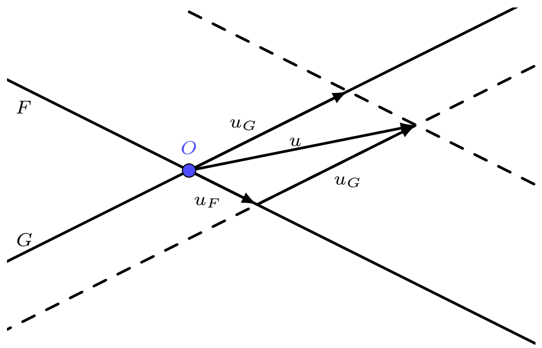
Dans $\mathbb{R}^3$, on a $F \oplus G = E$ ssi $\{F, G\} = \{\{0_{\mathbb{R}^3}\}, \mathbb{R}^3\}$ ou F, G sont un plan et une droite vérifiant que la droite n'est pas incluse dans le plan.

I.2.11 Définition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E. Tout $x \in E$ s'écrit donc de manière unique comme $x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$. L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F \end{array} \right.$ est appelé projecteur sur F parallèlement à G (ou de direction G).

L'application $s : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G \end{array} \right.$ est appelé symétrie par rapport à F parallèlement à G (ou de direction G).

I.2.12 Illustration

On représente les deux projections d'un vecteur u de $\mathbb{R}^2$ sur les droites F et G supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$, avec les mêmes conventions de notation que la définition. Pour obtenir



les projections, on a tracé en pointillés les parallèles à F et G passant par l'extrémité de u. les projections sont obtenues par intersection de ces parallèles avec G et F respectivement.

Remarquons qu'on a bien $u = u_F + u_G$ ou encore $u_G = u - u_F$

I.2.13 Liens entre ces applications

1. On a les liens important entre ces applications : $s = 2p - Id$ et $p = \frac{s+Id}{2}$.
2. Si p' et s' désignent les projection et symétrie sur G et de direction F, on a $p + p' = Id, p \circ p' = 0 = p' \circ p, s + s' = 0, s \circ s' = s' \circ s = -Id.$.

I.2.14 Méthode

Pour déterminer la projection $p(x)$ d'un vecteur x sur F parallèlement à G on exprime deux conditions sur $p(x)$:

1. $p(x) \in F$
2. $x - p(x) \in G$

I.2.15 Exemple

Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Alors (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$ (deux vecteurs libres dans un espace de dimension 2).

Ainsi $F = \text{Vect}(u)$ et $G = \text{Vect}(v)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$ d'après le théorème de la base adaptée. Notons p la projection sur F dans la direction G et déterminons $p(X)$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

— On a $p(X) \in F$ et donc $p(X) = \alpha u$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.
— On a $X - p(X) \in G$ et donc $X - p(X) = \beta v$ pour un $\beta \in \mathbb{R}$.

Ainsi $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = \alpha u + \beta v = \begin{pmatrix} \alpha - 2\beta \\ -\alpha + \beta \end{pmatrix}$ et donc $-\alpha = x + 2y$.

Finalement, $p(X) = \alpha u = (-x - 2y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2y \\ x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

On constate que $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et est canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si on note s la symétrie associée, on a $s = 2p - Id_{\mathbb{R}^2}$ et on en déduit sa matrice canoniquement associée.

I.2.16 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit p le projecteur sur F de direction G. On a alors :
   — $p \in \mathcal{L}(E)$

— $p^2 = p$
— $\ker p = G$
— $\operatorname{Im} p = F = \ker(Id_E - p)$

2. Réciproquement si $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $f^2 = f$ alors f est le projecteur sur $\operatorname{Im}(f) = \ker(f - Id)$ dans la direction $\ker(f)$ (et on a donc $\ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E$).

I.2.17 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient également F, G deux sous-espaces de E, supplémentaires dans E

1. Soit s la symétrie par rapport à F dans la direction G. Alors :
   — $s \in GL(E)$ et $s^2 = Id_E$ ie. $s = s^{-1}$
   — $F = \ker(s - Id_E) = \{x \in E |\ s(x) = x\}$
   — $G = \ker(s + Id) = \{x \in E |\ s(x) = -x\}$
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $f^2 = Id_E$ alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - Id_E)$ parallèlement à $\ker(f + Id_E)$ qui sont donc supplémentaires dans E.

I.2.18 Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. L'application de transposition $T : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & M^T \end{array} \right.$ est linéaire et vérifie que $T^2 = T$.

Ainsi T est une symétrie. C'est la symétrie par rapport à $\ker(T - Id) = \{M ; M^T = M\} = S_n(\mathbb{K})$ par rapport à $\ker(T + Id) = A_n(\mathbb{K})$. On retrouve ainsi que ces ensembles de matrices sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La projection sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$ est alors $p = \frac{s+Id}{2} : M \mapsto \frac{M+M^T}{2}$.

I.3 Somme et somme directe

I.3.1 Définition-Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E.

1. La somme des espaces $(F_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ est $\sum_{i=1}^{p} F_i = \{u_1 + \dots + u_p |\ u_1 \in F_1 \text{ et } u_2 \in F_2 \text{ et } \dots \text{ et } u_p \in F_p\}$. C'est le sous espace de E engendré par les F_i
2. On dit que la somme $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est une somme **directe** et on note $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi tout vecteur $u \in F$ s'écrit de manière **unique** sous la forme $u = u_1 + \dots + u_p$ avec $\forall i \in [\![1,p]\!]\ u_i \in F_i$.

La somme et la somme directe sont associatives, ce qui permet de justifier a posteriori l'utilisation de $\sum$ et $\bigoplus$

Preuve.

1. Il s'agit de montrer que $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est un sous-espace de E et que la somme d'espace est associative. Nous allons le montrer dans le cas $p = 3$ et on pourrait généraliser facilement (seule la formalisation est plus délicate). Montrons que
$$\underbrace{F_1 + F_2 + F_3}_{\text{cette définition}} = \underbrace{(F_1 + F_2) + F_3}_{\text{somme de deux espaces}} = \underbrace{F_1 + (F_2 + F_3)}_{\text{somme de deux espaces}}$$
Soit $x \in F_1 + F_2 + F_3$. Alors on peut écrire $x = u_1 + u_2 + u_3$ où $u_i \in F_i$ pour $i \in [\![1,3]\!]$.
Alors $x = (u_1 + u_2) + u_3 \in (F_1 + F_2) + F_3$ et $x = u_1 + (u_2 + u_3) \in F_1 + (F_2 + F_3)$ et on a prouvé deux inclusions.
Soit maintenant $x \in (F_1 + F_2) + F_3$. Alors on peut écrire $x = u + u_3$ où $u \in F_1 + F_2$ et $u_3 \in F_3$ par définition de la somme de deux espaces. Comme $u \in F_1 + F_2$, on peut écrire $u = u_1 + u_2$ où $u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2$. Finalement on a bien $x \in F_1 + F_2 + F_3$.
De la même manière $F_1 + (F_2 + F_3) \subset F_1 + F_2 + F_3$ et on a bien
$$F_1 + F_2 + F_3 = (F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$$
ce qui prouve au passage que $F_1 + F_2 + F_3$ est un sous-espace de E en tant que somme de deux sous-espaces.
On a alors $F_1 + F_2 + F_3 = \operatorname{Vect}((F_1 \cup F_2) \cup F_3) = \operatorname{Vect}(F_1 \cup F_2 \cup F_3)$.
2. Comme la somme d'espaces est associative, la somme directe l'est aussi. ■

I.3.2 Lemme
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F_1 \dots F_p$ des sous espaces de E et notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \iff \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=1}^{p} F_i & \to & F \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{p} x_i \end{array} \right. \text{ est un isomorphisme.}$$

Preuve.
La linéarité n'est pas difficile et comme pour I.2.5 la définition d'une somme directe est la même que la définition de la bijectivité.

On peut remarquer en plus ici qu'on a prit $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$ comme ensemble d'arrivée et donc ψ est toujours surjective. ∎

I.3.3 Remarque

Le cas $p = 2$ est déjà connu. La somme $F+G$ est directe ssi F et G sont supplémentaires dans $F + G$. Autrement dit

$$F + G = F \oplus G \iff F \cap G = \{0_E\}$$

I.3.4 Théorème
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E. La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{p} F_i \; u_1 + \cdots + u_p = 0_E \iff u_1 = u_2 = \cdots = u_p = 0_E.$$

Ainsi il suffit de vérifier que le vecteur nul possède une unique écriture sous forme de somme.

Preuve.
C'est une ré-écriture de $\ker(\psi) = \{0_E\}$ ∎

I.3.5 Définition-Proposition (Théorème de la base adaptée)
Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous espaces de E, de dimensions finies. Notons $F = \sum_{i=1}^{p} F_i$.

$F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$ ssi la concaténation de bases des F_i est une base de F.
Une telle base de F est dite **adaptée** à la somme directe.

Preuve.
On procède comme pour les supplémentaires en utilisant l'application ψ. ∎

I.3.6 Exercice
Trouver 3 espaces D_1, D_2, D_3 tels que $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$.

II Espaces stables

II.1 Endomorphisme induit

II.1.1 Définition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$.

II.1.2 Exemple
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $F_\lambda = \ker(f - \lambda id_E)$ est stable par f.

Soit $x \in F_\lambda$. Alors $(f - \lambda Id)(x) = 0_E$ et donc $f(x) - \lambda x = 0_E$ ou encore $f(x) = \lambda x$. Or F_λ est un sous-espace de E (car c'est un noyau d'endomorphisme) et donc $\lambda x \in F_\lambda$.

Ainsi $f(x) \in F_\lambda$ et F_λ est effectivement stable par f.

II.1.3 Endomorphisme induit

Si F est stable par f alors on peut définir $f_{|F} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ la restriction de f à F (le détail important ici est l'espace d'arrivé qui est illégal si F n'est pas stable).

Alors $f_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

II.1.4 Familles génératrices

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. F est stable par f ssi $\forall j \in [\![1, p]\!] f(e_j) \in F$. En effet $f(F) = \mathrm{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

II.1.5 Proposition
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

Si $f \circ g = g \circ f$ alors $\ker(f)$ est stable par g et $\ker(g)$ est stable par f

Preuve.
Il suffit de montrer une stabilité d'après la symétrie de l'hypothèse $f \circ g = g \circ f$.

Soit $x \in \ker(f)$. Montrons que $g(x) \in \ker(f)$. Or $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ donc $g(x) \in \ker(f)$. ∎

II.2 En dimension finie

II.2.1 Exemple
Considérons l'application $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x-y+z \\ x+y-z \end{pmatrix}$.

On pose $u = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ et $G = \mathrm{Vect}(w)$.

Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que F, G sont stables par f, calculer $\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f_F), \mathrm{Mat}_{(v)}(f_G)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Réponse : Le déterminant dans la base canonique de (u, v, w) vaut -6 (faire l'opération $C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{2}C_1$ pour trouver un déterminant triangulaire.) et donc $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

On a $f(w) = \begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} = -2w \in G$ et donc G est stable par f. De plus, $f(u) = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v$ (on a cherché $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(u) = \alpha u + \beta v$) et $f(v) = \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}v$ et donc F est stable par f.

Ces calculs permettent d'écrire les matrices demandées

$$\mathrm{Mat}_{(u,v)}(f_{|F}) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \mathrm{Mat}_{(w)}\, f_{|G} = (-2) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

où les 0 sont la conséquence du fait que G est stable par f (seul w est nécessaire à l'expression de $f(w)$) et les 0 la conséquence de la stabilité de F par f ($f(u), f(v)$ s'expriment en fonction de seulement u et v).

II.2.2 Théorème

Soit F un sous-espace de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$

F est stable par f ssi $\mathrm{Mat}_B(f)$ est de la forme $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$ où

- $A \in M_p(\mathbb{K})$ (et on a alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f_{|F})$)
- $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$
- $C \in M_{n-p}(\mathbb{K})$
- 0 représente la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$

Preuve.
On note $M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Supposons F stable par f et notons, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ (les p premiers sont dans F). Pour $j \in [\![1, p]\!]$, on a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}e_i$. Les derniers termes de cette somme sont nuls car $e_j \in F$, ainsi $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} m_{ij}e_i$. Ceci prouve que les n - p dernières lignes de M sont nulles dans les p premières colonnes.

Réciproquement, si M est de la forme annoncée, alors $f(e_j)$ n'a des coordonnées que sur $e_1, \dots, e_p$ ie est dans F, et ce pour tout $j \in [\![1, p]\!]$. ■

II.2.3 Exemple

Donner l'interprétation géométrique de l'endomorphisme f canoniquement associé à

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Notons $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ et $P = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

Alors D et P sont stables par f et on a $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ d'après le théorème de la base adaptée.

De plus, pour les vecteur de D, f est l'identité. Ainsi l'axe D est invariant par f.

De plus $f_{|P}$ est une rotation d'angle θ du plan P. On peut interpréter f comme la rotation d'angle θ autour de l'axe D.

III Hyperplans et équations

III.1 Hyperplans ($\star$)

III.1.1 Définition-Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit H un sous-espace de E.

$\dim(H) = n - 1 \iff$ il existe un supplémentaire de H qui soit une droite.

Dans chacun de ces deux cas, on dit que H est un hyperplan.

Preuve.
Immédiat en appliquant le théorème de la base incomplète pour $\Rightarrow$. ■

III.1.2 Exemple

Les droites dans $\mathbb{R}^2$, les plans dans $\mathbb{R}^3$.

III.1.3 Droites supplémentaires

Soit H un hyperplan de E et D une droite. On a $H \oplus D = E \iff H \cap D = \{0_E\} \iff D$ n'est pas incluse dans H.

Ainsi tout vecteur $u \notin H$ dirige un supplémentaire de H.

III.1.4 Formes linéaires

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ une application linéaire dont l'ensemble d'arrivé est $\mathbb{K}$ (le même que dans "E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel"). On suppose que f n'est pas l'application nulle.

Alors $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_K\}$ et donc $\mathrm{rg}(f) > 0$. Or, a priori, $\mathrm{rg}(f) \leqslant 1$ et donc finalement $\mathrm{rg}(f) = 1$. Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = n - 1$

Ainsi $\ker(f)$ est un hyperplan de E. Le théorème suivant peut être vu comme réciproque de ce résultat.

III.1.5 Lemme
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ deux formes linéaires.
$\ker(f) = \ker(g)$ ssi f et g sont proportionnelles ssi il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = \alpha f$.

Preuve.
Remarquons que $\ker(f) = \ker(g)$ est soit un hyperplan soit E (dans le cas où $f = g = O_{\mathcal{L}(E,\mathbb{K})}$). On traite seulement le cas $\ker(f) = \ker(g) = H$ un hyperplan de E.

Soit $u \in E \backslash H$. Alors $H \oplus \mathrm{Vect}(u) = E$. Alors $f(u) \in \mathbb{K}^*$ et $g(u) \in \mathbb{K}^*$ car u n'est pas dans le noyau de ces applications.

Pour $x \in E$, notons $x = x_K + \lambda u$ où $x_K \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a alors

$$g(x) = g(x_K) + \lambda g(u) = \lambda g(u) = \lambda \frac{g(u)}{f(u)} f(u) = \frac{f(u)}{g(u)} f(x)$$

En posant $\alpha = \frac{g(u)}{f(u)} \in \mathbb{K}^*$ on a bien $\forall x \in E \; g(x) = \alpha f(x)$ ∎

III.1.6 Théorème
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E.

Pour un hyperplan H il existe $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel qu'une équation de H dans la base $\mathcal{B}$ soit $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ ce qui signifie que $x \in E$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}$) appartient à H ssi $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$.

Toutes les autres équations de H dans $\mathcal{B}$ sont proportionnelles à celle-ci.

Preuve.
- Soit $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ une base de H. Soit $x \in E$

  On a alors $x \in E \iff x \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{n-1}) \iff (u_1, \ldots, u_{n-1}, x)$ est liée $\iff \det_{\mathcal{B}}(x, u_1, \ldots, u_{n-1}) = 0$.

  Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on obtient bien une équation de la forme $x_1 \times a_1 + \cdots + x_n \times a_n = 0$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des déterminants de taille $n-1$ composés de coordonnées des vecteurs u_i.

  On doit maintenant prouver que $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est à dire qu'au moins un coefficient est non nul. Par l'absurde c'est évident, sinon tous les vecteurs $x \in E$ vérifieraient l'équation précédente et on aurait $E \subset H$ ce qui n'est pas par un argument de dimension.

- Il nous reste à montrer que toute autre équation de H dans $\mathcal{B}$ est proportionnelle à l'équation trouvée ici (qui, a priori, dépend au moins du choix de la base de H).

  Notons $f : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i \end{cases}$. Il s'agit d'une forme linéaire dont le noyau est H. Une autre équation de H est donnée par $g \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $\ker(g) = H = \ker(f)$. Par les lemme précédent $g = \alpha f$ et les équations sont bien proportionnelles. ∎

III.2 Systèmes d'équations

III.2.1 Exemple
Donner l'interprétation géométrique de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Il s'agit d'une droite vue comme intersection de deux plans de l'espace.

III.2.2 Système et théorème du rang

On considère un système linéaire homogène à n équations et p inconnues noté matriciellement $AX = 0$ où l'inconnue est $X \in \mathbb{K}^p$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}$.

L'ensemble des solutions est $\ker(A)$ est de dimension $p - \mathrm{rg}(A)$. Cette dimension est exactement le nombre de paramètres à poser pour résoudre ce système. $\mathrm{rg}(A)$ est le nombre d'équations restantes une fois le système échelonné.

III.2.3 Intersection d'hyperplans

Soient $H_1, \dots H_p$ des hyperplans de E de dimension $n \geqslant p$ et $\mathcal{B}$ une base de E. L'intersection $H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_p$ est l'ensemble des solutions d'un système S à n inconnues (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et p équations. Le rang de S est au maximum p donc l'ensemble des solutions (notre intersection) est de dimension au moins $n - p$.

Quel est le cas d'égalité pour les dimensions ?

III.2.4 Théorème
Soit E de dimension $n > 0$ et $p \leqslant n$.

1. l'intersection de p hyperplans de E est de dimension au moins $n - p$.
2. réciproquement, tout sous-espace de dimension p est l'intersection de $n - p$ hyperplans (et possède donc un système d'équation à $n - p$ équations et n inconnues dans une base fixée de E).

Preuve.
Il nous reste à prouver le deuxième point.

Soit F un sous-espace de E de dimension p. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F et complétons cette base en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $x \in E$ et $\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors $x \in F \iff x_{p+1} = 0$ et $\dots$ et $x_n = 0$.

Si on note $H_i : x_i = 0$ pour $i \in [\![p+1, n]\!]$ des hyperplans décrits par leurs équations dans $\mathcal{B}$, alors $F = \bigcap\limits_{i=p+1}^{n} H_i$. On obtient bien $n - p$ hyperplans ie. $n - p$ équations. ∎

Index