Révisions

Exercice 1
On pose $E = \mathbb{R}^3$, $u \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ et $F = \{v \in \mathbb{R}^3 |\ u \wedge v = 0_{\mathbb{R}^3}\}$. Montrer (sans raisonnement géométrique) que F est un espace vectoriel.

Cette fois géométriquement, que peut-on dire de F ?

Exercice 2
On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \{P(X) \in E;\ P(0) = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace de E et donner un supplémentaire de F.

Exercice 3

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P - (1+X)P' \end{array} \right.$. Montrer que f est linéaire et donner des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 4
Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ linéaire

On suppose qu'il existe une famille génératrice de E.

1. Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F
2. Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F

Manipulations d'espaces

Exercice 5
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6
Vrai ou Faux ?

Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E.

1. $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$.
3. $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Im}\,(g \circ f)$.
4. $\ker\,(g \circ f) \subset \ker f$.
5. $\ker f \subset \ker\,(g \circ f)$.
6. $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f \Leftrightarrow f^2 = 0$.
7. $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = f(\ker f^2)$.
8. Si f est injective, alors f est bijective.
9. $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 7
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On considère H_1, H_2 deux hyperplans de E.

Que dire de la dimension de $H_1 \cap H_2$?

Familles libres et génératrices

Exercice 8
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul de E (espace de dimension n). On suppose qu'il existe un entier naturel p tel que $f^p = 0$ et on prend p le plus petit possible ie. $f^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$; On suppose, pour un entier naturel k, que $f^k(x) = 0_E$. Que dire de $f^r(x)$ lorsque $r \geqslant k$?
2. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
3. Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 9
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(nx)$ et $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Montrer que $(f_n)_{n \in [\![0,p]\!]}$ est une famille libre de E pour tout $p \in \mathbb{N}$. Qu'en déduire sur l'espace E ?

Indication : on pourra procéder par récurrence et utiliser la dérivation.

Exercice 10
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}\,(E)$ telle que

pour tout $x \in E$, $(x, u\,(x))$ est une famille liée.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. En considérant $e_i + e_j$, montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ pour $i \neq j$.
3. Donner l'ensemble des endomorphismes u vérifiant la propriété de l'énoncé.
4. Quels sont les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres matrices ? On introduira u, l'endomorphisme canoniquement associé à M et on utilisera l'hypothèse de commutation sur des projecteurs bien choisis.

Sommes directes

Exercice 11
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \geq 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$.

On pourra admettre le résultat de l'exercice 5

Exercice 12
Soit E un espace vectoriel de dimension finie. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $F_1 = \ker(f)$, $F_2 = \ker(f - Id_E)$, $F_3 = \ker(f - 2Id_E)$.

1. Montrer que l'on a la somme directe $F_1 + F_2 + F_3 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$
2. On suppose maintenant que $f^3 - 3f^2 + 2f = 0$. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
3. En notant r_i la dimension de F_i, donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme précédente.

Projections, symétries

Exercice 13
On se place dans $\mathbb{R}^2$. On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $D_u = \text{Vect}(u)$ et $D_v = \text{Vect}(v)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. On note p le projecteur sur D_u parallèlement à D_v et s la symétrie associée. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, calculer $p\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de p dans $\mathcal{B}$. Même question pour s
3. Calculer les matrices de p et s dans $\mathcal{B}' = (u, v)$

Exercice 14
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

1. Calculer A^2. Qu'en déduire pour f ?
2. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$ puis la matrice de f dans une base adaptée à $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Exercice 15
On se place dans $E = \mathbb{R}^4$ et on considère l'hyperplan donné par son équation $H : x + y + z + t = 0$

1. Donner une base u_1, u_2, u_3 de H.
2. On pose $u_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $D_4 = \text{Vect}(u_4)$. Montrer que $H \oplus D_4 = \mathbb{R}^4$.
3. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$. Calculer son projeté $p_4(X_0)$ sur D_4 dans la direction H, puis donner la matrice M_4 de p_4 dans la base canonique.
4. En notant $D_i = \text{Vect}(u_i)$ pour $i \in [\![1, 3]\!]$, écrire H comme une somme directe de 3 espaces puis écrire $\mathbb{R}^4$ comme somme directe de 2 ou 3 espaces de toutes les manières possibles en utilisant seulement les espaces D_i.
5. On note p_i la projection sur D_i parallèlement à l'espace trouvé à la question précédente. Calculer les matrices Δ_i de p_i pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$ dans la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$.
6. Quel est le lien entre M_4 et Δ_4 ? On exhibera une matrice de passage sans calculer son inverse.

Exercice 16
Soient E, F 2 $\mathbb{K}$-ev. Soient de plus $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v = Id_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (projecteur sur quel espace, parallèlement à quel autre ?).

Exercice 17
On pose $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f_o : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(-x) \end{array} \right. \end{array} \right.$ est une symétrie. Qu'en déduire ?

Espaces stables

Exercice 18
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On pose également $P : x - z = 0$ un plan vectoriel et $D = \text{Vect}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Donner une base de P puis montrer que P et D sont stables par f.
2. Montrer que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$ et donner la matrice M de f dans une base adaptée à cette somme directe. Que dire des matrices A et M ?
3. On pose $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D_1 = \text{Vect}(u_1)$ et $D_2 = \text{Vect}(u_2)$. Montrer que $P = D_1 \oplus D_2$.
4. Donner la matrice de f dans une base adaptée à $\mathbb{R}^3 = D_1 \oplus D_2 \oplus D_3$ puis montrer que f est une combinaison linéaire de projecteurs.

Exercice 19
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g.

Exercice 20
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si $\ker(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u.