Devoir surveillé n°2

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Calculer $\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ et donner les valeurs de λ qui font que ce déterminant est nul.
2. Rappeler les valeurs de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ en précisant pour quelles valeurs de x les séries concernées convergent.
3. On considère une courbe paramétrée $f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ pour laquelle on donne le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$			0	$+$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$			

   (a) Décrire les tangentes aux points de paramètres -1 et 1. (Elles passent par .... et donner leur directions)
   (b) On suppose que $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\to} 0$. Que dire de la branche infinie lorsque $t \to +\infty$?
   (c) On suppose que $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{-\infty}{\to} -\frac{1}{2}$. Quel calcul doit-on effectuer pour pouvoir conclure ? On suppose que le résultat de ce calcul est 0. Que conclure ?
   (d) Donner un tracé rapide de l'allure de cette courbe.

Exercice 2

Dans cet exercice, nous allons essayer de déterminer des conditions pour que deux matrices soient semblables.

Partie I : exemple géométrique

On note $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = 2A - I_2$ où I_2 est la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B.

Pour $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice carrée de taille 2, on note $P_M(X) = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$ (que l'on appelle polynôme caractéristique de A).

1. Calculer les polynômes P_A et P_B et préciser leurs racines (éventuellement complexes).
2. Montrer que $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$ sont des droites vectorielles et donner une base (u) de $\ker(A)$ et une base (v) de $\mathrm{Im}(A)$.
3. On note $\mathcal{B} = (v, u)$, montrer que $\mathcal{B}$ est une base puis que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Les matrices A et B sont-elles semblables ? Que dire de A et M_1 ?

Partie II : cas général

Nous allons, dans le cas général, essayer de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que deux matrices carrées de taille 2 soient semblables.

Dans toute cette partie, A désigne une matrice carrée quelconque, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, nous allons établir quelques résultats utiles pour la suite.
   (a) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, semblable à A. Montrer que $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$ et $\det(B) = \det(A)$.
   (b) Soit A et $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ toutes les deux semblables à $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables.
   (c) Montrer que $A^2 - (\text{tr}\, A)A + \det(A)I_2 = 0$.
   (d) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha \neq \beta$. On suppose de plus que l'on dispose de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{C}^2$ **non nuls** tels que $Au = \alpha u$ et $Av = \beta v$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
2. Cas des homothétie. On suppose, dans cette question seulement, que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est une matrice d'homothétie, c'est à dire $A = \lambda I_2$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (a) Soit B une matrice semblable à A. Donner les coefficients de B.
   (b) Calculer P_A et donner ses racines.
3. Cas de racines distinctes. On suppose dans la question 3 que P_A possède deux racines distinctes α et β. En particulier A n'est pas une matrice d'homothétie.
   (a) Rappeler le lien entre $\text{tr}(A), \det(A)$ (des coefficients de P_A) et α, β. A quelle condition sur $\text{tr}(A)$ et $\det(A)$ a-t-on bien $\alpha \neq \beta$?
   (b) Montrer que $(A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = 0$.
   (c) Pourquoi $A - \alpha I_2 \neq 0$? En déduire que $A - \alpha I_2$ et $A - \beta I_2$ ne sont **pas** inversibles.
   Montrer alors qu'il existe $u, v \in \mathbb{C}^2$ **non nuls** tels que $Au = \alpha u$ et $Av = \beta v$.
   (d) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
   (e) Montrer que si $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifie $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ et $\det(A) = \det(B)$ alors A et B sont semblables.
4. On suppose dans cette question que A n'est pas une matrice d'homothétie et que P_A possède une racine double $\alpha = -\frac{\text{tr}(A)}{2}$.
   (a) On peut montrer (ce n'est pas demandé ici), comme à la question 3 que $(A - \alpha I_2)^2 = 0$ et $A - \alpha I_2 \neq 0$. On pose $M = A - \alpha I_2$.
   Justifier qu'il existe $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $Mu \neq 0$.
   (b) On pose $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $Mu \neq 0$ et $v = Mu$. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{C}^2$.
   (c) En déduire que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis que A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.
   (d) Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que B est semblable à A si, et seulement si, B n'est pas une matrice d'homothétie et $\text{tr}(B) = \text{tr}(A)$ et $\det(A) = \det(B)$.

Exercice 3

Partie I : Étude d'une suite

On considère les suites définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{3}{2u_n} \end{cases} \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}\ v_n = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Ceci justifie a posteriori que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies.
2. Montrer que $v_0 \in]0, \frac{1}{10}[$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ v_{n+1} = (v_n)^2$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n = v_0^{(2^n)}$ et montrer que $v_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \sqrt{3}\frac{1+v_n}{1-v_n}$ et en déduire la limite de (u_n) ainsi qu'une expression de $u_n - \sqrt{3}$
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{1-v_n} \leqslant \frac{10}{9}$ puis montrer que $0 \leqslant u_n - \sqrt{3} \leqslant 4 \times \frac{1}{10^{(2^n)}}$.
   On pourra admettre que $\frac{20\sqrt{3}}{9} \leqslant 4$
7. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ peut-on affirmer que $|u_n - \sqrt{3}| \leqslant 10^{-p}$? Donner une application numérique pour $p = 1023$

Partie II : une approximation de π

1. Dans cette première question, on étudie la convergence de certaines séries. Soit $x \in \mathbb{R}$. On étudie la série
$$\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
   (a) Dans cette question, on traite le cas $x = 1$. Montrer que la série obtenue est une série convergente.
   (b) Que dire dans le cas $x = -1$?
   (c) Montrer que si $x \in]-1, 1[$, alors $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ converge absolument.
   (d) Montrer que si $|x| > 1$, alors $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ diverge grossièrement.
2. Soit $x \in]-1, 1[$. Exprimer sous forme de la somme d'une série la quantité $\frac{1}{1+x^2}$.
   Pour la suite, on admet, provisoirement, que
$$\forall x \in [-1, 1] \ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$$
3. Pour $x \in [-1, 1]$ et $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
   On note également $R_N(x) = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
   (a) Calculer $S_1(x)$ et $S_3(x)$.
   (b) Rappeler le nom donné à $R_N(x)$ et justifier que la série considérée converge (on pourra admettre des résultats de la question 1).
   (c) Donner sans justification le lien entre $S_N(x), R_N(x)$ et $\arctan(x)$.
   (d) Montrer que $|R_N(x)| \leqslant \frac{|x^{2N+3}|}{2N+3}$. On pourra traiter d'abord le cas $x \geqslant 0$
4. Dans cette question, on fixe $x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
   (a) Que vaut $\arctan(x)$ pour cette valeur de x ? Exprimer alors $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ comme la somme d'une série ne faisant pas apparaître x ni la quantité $\sqrt{3}$. Les nombres sommés devront être rationnels (des fractions d'entiers).
   (b) On note maintenant $s_N = 2 \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$. Montrer que
$$\left| \frac{\pi}{\sqrt{3}} - s_N \right| \leqslant \frac{2}{(2N+3)3^{N+1}}$$
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$. En remarquant que pour $N \in \mathbb{N}$ on a $2N + 3 \geqslant 3$, donner une condition suffisante sur $N \in \mathbb{N}$ pour que $\left| \frac{\pi}{\sqrt{3}} - s_N \right| \leqslant 10^{-k}$.
5. Conclusion des deux parties. La suite (u_n) est définie dans la première partie et la suite (s_N) dans la seconde.
   (a) Soient $p, k \in \mathbb{N}^*$. Traduire les inégalités $|u_n - \sqrt{3}| \leqslant 10^{-p}$ et $|s_N - \frac{\pi}{\sqrt{3}}| \leqslant 10^{-k}$ par des encadrements sur u_n et s_N.
   En déduire un encadrement de $u_n s_N - \pi$. On pourra admettre que $\frac{\pi}{\sqrt{3}} \geqslant 1$ si besoin.
   (b) On prend p un entier strictement positif et on suppose que n, N sont choisis pour que u_n soit un approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-p} près (c'est à dire $|u_n - \sqrt{3}| \leqslant 10^{-p}$) et s_N est une approximation de $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ à 10^{-p} près.
   Montrer que $u_n s_N$ est une approximation de π à $10^{-(p-1)}$ près. On pourra utiliser si besoin $\sqrt{3} \leqslant 2$ et $\pi \leqslant 4$.

   Les questions I.7 et II.4c permettent maintenant de calculer une fraction (sans utiliser des flottants de python par exemple) qui sera une approximation de π à une précision arbitraire.

Exercice 4
On pose $\alpha \in [+0, +\infty[$ et on considère la courbe paramétrée par
$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\alpha \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{OM}(t)$$

1. Montrer que l'on peut étudier f sur $[0, 2\pi]$ et préciser la symétrie à effectuer pour obtenir le tracé complet.

2. Montrer que tous les points de f sont réguliers ssi α est différent d'un certain réel à préciser.
3. Étude du cas $\alpha = 0$. Tracé sur votre copie le support de f (aucune justification n'est exigée).
4. Étude du cas $\alpha = \sqrt{2}$.
   (a) En factorisant $\sin(t)$ après avoir remarqué que $t = 2 \times \frac{t}{2}$ étudier le signe de $x'(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. On attend ici un tableau de signes. On dtoi trouver 3 points d'annulation en 0, $\frac{3\pi}{2}$ et 2π.
   (b) Donner un tableau de variations de x et y sur $[0, 2\pi]$ incluant les valeurs des fonctions aux bornes et à chaque point d'annulation d'une des dérivées, ainsi qu'au paramètre π
   (c) Donner les paramètres où les tangentes à la courbe sont horizontales ou verticales (en précisant le cas pour chaque paramètre donné).
   (d) Donner un vecteur directeur de la tangente au point où la courbe coupe l'axe des abscisses (autre part qu'aux extrémités de l'intervalle d'étude).
   (e) Donner un vecteur directeur de la tangente au point singulier et préciser l'allure de la courbe au voisinage de ce point (est-ce un point ordinaire ? de rebroussement ? ...)
   (f) Prenez une feuille banche, votre compas et une règle (pas d'équerre pour l'instant). Placer la feuille en mode paysage (horizontalement).
      — Tracer un repère orthonormé centré (environ) sur votre feuille et graduer les axes avec une unité d'environ 3cm grâce au compas uniquement. Laisser les traits de constructions du repère. L'axe (Ox) doit être parallèle (ou presque) au grand côté de la feuille.
      — Expliquez sur votre copie comment obtenir un segment de longueur $\sqrt{2}$ unités.
      — Placer les abscisses obtenues comme valeurs de $x(t)$ dans le tableau de variations, puis les ordonnées obtenues comme valeurs de $y(t)$.
      — Vous pouvez maintenant utiliser l'équerre pour placer les points $M(t)$ pour $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ et 2π.
   (g) Placer sur votre schéma les tangentes à la courbe en tous les points que vous avez placé.
   (h) Tracer la courbe sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ puis sur $[-2\pi, 0]$.