Table des matières

I Rayon de convergence

I.1 Série entière

I.1.1 Définition

- Une série entière de variable $z \in \mathbb{K}$ est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{K}$.
- Les termes de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont appelés les coefficients de la série entière.
- Pour chaque $z_0 \in \mathbb{K}$ on étudie la convergence de la série numérique $\sum a_n z_0^n$. L'ensemble des $z_0 \in \mathbb{K}$ pour lesquels la série entière converge est appelé domaine de convergence. Ce domaine contient toujours 0
- La somme de cette série entière est la **fonction** $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ définie sur le domaine de convergence.

Lorsque la variable est réelle, on la note x plutôt que z.

I.1.2 Remarque

Comme pour les séries numériques, on peut considérer des séries entières dont le premier terme n'est pas d'indice 0. Pour revenir dans le cadre du cours, on considère que les premiers termes de (a_n) sont nuls. La convergence des séries numériques ne dépend pas de la valeurs des premiers termes (mais la somme oui !).

Explication On reconnaît une série entière au fait qu'on voit apparaître la variable z à la puissance n exactement (l'indice de somme) et que le facteur de z^n est une quantité qui ne dépend que de n et pas de z : son coefficient.

Plus précisément, chaque somme partielle est une fonction polynomiale de la variable z.

I.1.3 Proposition (Rappel)
Soit $(b_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes.

$$b_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \iff |b_n| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Preuve.
Simple écriture de la définition, pour $n \in \mathbb{N}$ on a évidemment $|b_n - 0| = ||b_n| - 0| = |b_n|$. ∎

I.1.4 Exemple

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a vu que la série numérique $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$. On peut donc considérer la série entière $\sum z^n$ qui est bien définie sur $D = \{z \in \mathbb{C}|\ |z| < 1\}$. C'est le disque unité ouvert.

On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

I.2 Convergence d'une série entière

I.2.1 Rappel sur la divergence grossière

- Si $u_n \nrightarrow 0$ alors $\sum u_n$ diverge.
- Si (u_n) n'est pas bornée, alors elle ne peut pas être convergente.

I.2.2 Théorème (Lemme d'Abel)
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)$ est une suite bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$ on a

$$|a_n z^n| = O_{+\infty}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right) \text{ et donc } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n \textbf{ converge.}$$

Preuve.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$. Alors $|a_n z^n| = |a_n r^n| \left(\frac{|z|}{r}\right)^n = O_{+\infty}(1)\left(\frac{|z|}{r}\right)^n = O_{+\infty}\left(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n\right)$

Comme $0 \leqslant \frac{|z|}{r} < 1$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{|z|}{r}\right)^n$ converge et donc $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument par comparaison de séries à termes positifs. ∎

I.2.3 Exemple
On considère la série entière $\sum \sin(n) z^n$. $z_0 = 1$ convient donc tout z tel que $|z| < 1$ est dans le domaine de convergence.

I.2.4 Définition-Proposition
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

1. L'ensemble $I = \{r \in \mathbb{R}^+ | \ (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[0, \alpha)$ (la deuxième borne est ouverte ou fermée, finie ou non)
2. $R = \sup(I) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé **rayon de convergence** de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

Preuve.
Il faut montrer que I est un intervalle de la forme $[0, \alpha)$ (borne ouverte ou fermée, $a \in \overline{\mathbb{R}^+}$). Il suffit de montrer que si $r \in I$ alors $[0, r] \subset I$ ie que tous les nombres inférieurs à r sont encore dans I.

Soit $r \in I$ et $\rho \in [0, r]$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |a_n| \rho^n = |a_n| r^n \underbrace{\frac{\rho^n}{r^n}}_{\leqslant 1} \leqslant |a_n| r^n$ et donc $(|a_n| \rho^n)$ est bornée, c'est à dire que $\rho \in I$. ∎

I.2.5 Rayon de référence

Le rayon de convergence de la série géométrique $\sum z^n$ vaut 1.
La série entière nulle possède un rayon de convergence infini.

I.2.6 Exemple
Calculons le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n+1} z^n$.

— Si $|z| > 1$ alors $\left(\frac{z^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée (son module tend vers $+\infty$).

— Si $|z| < 1$, $\left(\frac{z^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc est bornée.

Finalement, $I = [0, 1[$ et donc $R = 1$.

I.2.7 Rayon nul

On peut très bien avoir $I = [0, 0] = \{0\}$ (et donc $R = 0$) c'est a dire que pour tout $r > 0$, $(a_n r^n)$ n'est pas bornée. Par exemple $a_n = n!$ convient.

I.2.8 Théorème
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Si $|z| < R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument donc converge.
2. Si $|z| > R$ alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
3. Si $|z| = R$ on ne peut pas conclure a priori sur la nature de $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$.

Preuve.

1. Il s'agit juste un redite du lemme d'Abel (si $|z| < R$ alors $|z| < r$ pour un $r \in I$).
2. Il suffit de remarquer qu'une suite non bornée ne peut tendre vers 0 (car toute suite convergente est bornée).
3. Reprenons la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} z^n$. Pour $z = 1$, il s'agit de la série harmonique, notoirement divergente. Pour $z = -1$, on trouve une série alternée convergente. ∎

I.2.9 Domaines de convergence

1. Une série entière réelle (on calcule $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour x réel) est convergente au moins sur l'intervalle $]-R, R[$ où R est le rayon de convergence. La convergence en $\pm R$ est éventuellement à étudier au cas par cas.
2. Pour une série complexe, la série converge sur $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < R\}$. Sur l'ensemble $C_R = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = R\}$, on ne peut rien dire a priori.

On représente schématiquement le résultat précédent comme suit.

Les zones en vert sont les valeurs de la variable où la convergence absolue est assurée. Les zones en rouge sont les valeurs de la variable où la divergence grossière est assurée. Pour la zone bleue (cercle de centre O et de rayon R), on ne peut rien dire sans étude complémentaire.

La figure pour une variable réelle est la suivante :

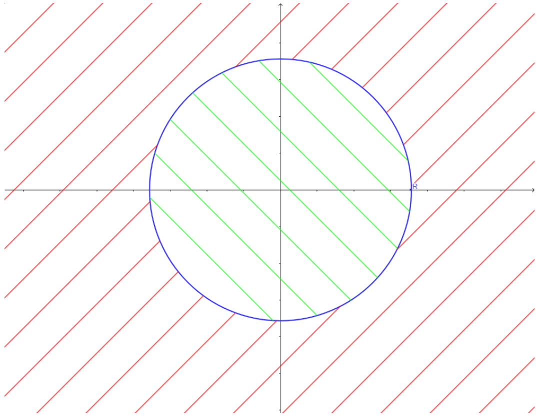

Figure 1 – Disque de convergence

Figure 2 – Intervalle de convergence

I.2.10 Contraposées

Si on trouve un $z \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n z^n$ converge alors $R \geqslant |z|$.
Si on trouve un $z \in \mathbb{C}$ tel que la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge alors $R \leqslant |z|$.

I.2.11 Exemple
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrons que le rayon de convergence R de $\sum n^\alpha x^n$ vaut 1 (dans les cas $\alpha > 0$ comme $\alpha < 0$). On considère ici une variable réelle.

1. Pour $x \in]-1, 1[$ ($|x| < 1$), on a $n^\alpha x^n = o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$ (calculer le quotient, conclure par croissances comparées). Ainsi $\sum n^\alpha x^n$ converge absolument donc converge. Ainsi $R \geqslant 1$.
2. Pour x tel que $|x| > 1$, on a $|n^\alpha x^n| \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$ et donc $\sum n^\alpha x^n$ diverge grossièrement et donc $R \leqslant 1$.

Finalement $R = 1$.

I.3 Calcul du rayon de convergence

I.3.1 Rayon 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. Si (a_n) n'est pas bornée (par exemple $a_n \underset{+\infty}{\rightarrow} +\infty$) alors $R \leqslant 1$.
2. Si (a_n) est bornée (par exemple (a_n) converge), alors $R \geqslant 1$.

I.3.2 Proposition
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b

1. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ (au moins à partir d'un certain rang), alors $R_a \geqslant R_b$
2. Si $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$ alors $R_a \geqslant R_b$ (en particulier dans le cas $a_n = o_{+\infty}(|b_n|)$).
3. Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Preuve.

1. Soit $r < R_b$. On doit montrer que $(|a_n|r^n)$ est bornée (et donc que $r \leqslant R_a$). Or par hypothèse, on peut poser $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|a_n| \leqslant M|b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{R}$.
   Ainsi $|a_n|r^n \leqslant M|b_n|r^n$ et $(|b_n|r^n)$ est bornée donc $(|a_n|r^n)$ est bornée aussi. Ainsi $r \leqslant R_a$ et tout nombre plus petit que R_b est plus petit que R_a. On ne peut pas avoir $R_a < R_b$, c'est à dire qu'on a prouvé $R_a \geqslant R_b$.

2. C'est une conséquence directe car dans ce cas $a_n = O_{+\infty}(|b_n|)$ et $b_n = O_{+\infty}(|a_n|)$. ■

I.3.3 Exemple
Le rayon de convergence de $\sum \sin(\frac{1}{n})z^n$ est 1 car $\sin(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

I.3.4 Conséquence

Comme pour les séries numériques, on peut commencer par calculer un équivalent simple de a_n et raisonner sur cet équivalent.

I.3.5 Série produit

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Supposons que pour un $z_0 \in \mathbb{C}$ fixé, les deux séries numériques convergent absolument.

Alors $\sum d_n$ converge absolument si on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}\ d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k b_{n-k} z_0^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z_0^n$$

.

Ainsi, avec $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, la série $\sum c_n z_0^n$ converge. Il s'agit de la série entière produit.

I.3.6 Théorème
Soient $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et $\sum b_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_b.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ est de rayon de convergence R_a. Le cas $\lambda = 0$ donne un rayon infini.
2. Le rayon de convergence R de la série $\sum (a_n + b_n)x^n$ vérifie $R = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$ et $R \geqslant R_a$ dans le cas $R_a = R_b$.
3. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_n x^n = \sum a_n x^n \times \sum b_n x^n$ vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$.

Preuve.
Il s'agit d'une traduction directe des propriétés de convergences vu dans le chapitre sur les séries. Le méthode est la suivante : on prend $r < R$ (le rayon de convergence que l'on veut calculer) et on prouve la convergence par application du chapitre sur les séries numériques. La remarque I.2.10 conclut. ■

I.3.7 Inégalités strictes

On peut tout à fait avoir des inégalités strictes dans le théorème précédent. Il suffit de considérer des séries opposées pour la somme et le produit par la série nulle.

I.3.8 Proposition
Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Preuve.
Notons R_1 et R_2 ces deux rayons (respectifs). Comme $a_n = o_{+\infty}(n|a_n|)$, $R_1 \geqslant R_2$.
On traite maintenant le cas $R_1 > 0$.

Soit $r < R_1$. Montrons que $(n|a_n|r^n)$ est bornée. Soit $r' \in]r, R_1[$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $n|a_n|r^n = \underbrace{|a_n|(r')^n}_{\text{bornée}} \times n\left(\frac{r}{r'}\right)^n$.

Or, par croissances comparées, $n\left(\frac{r}{r'}\right)^n \underset{+\infty}{\to} 0$ et est donc bornée. Par produit, $(n|a_n|r^n)$ est bornée. Ainsi $r \leqslant R_2$ et finalement $R_2 \geqslant R_1$. ■

I.3.9 Exemple
Les séries suivantes sont de rayon de convergence 1 : $\sum n^2 z^n, \sum \frac{1}{n^2} z^n, \sum P(n) z^n$ où $P \in \mathbb{C}[X] \backslash \{0\}$.

I.4 d'Alembert

Commençons par un rappel :

I.4.1 Théorème (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge (on a même $\forall q \in]\ell, 1[\ u_n = o_{+\infty}(q^n)$).
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge grossièrement (car $u_n \underset{+\infty}{\to} +\infty$).
3. Si $l = 1$ la série $\sum u_n$ peut être divergente ou convergente.

I.4.2 Proposition
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que $a_n \neq 0$ (au moins à partir d'un certain rang).

Si $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est :

— 0 dans le cas $\ell = +\infty$

— $+\infty$ dans le cas $\ell = 0$

— $\frac{1}{\ell}$ dans le cas $\ell \in]0, +\infty[$.

Preuve.
On suppose que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \underset{+\infty}{\to} \ell$ (qui est forcément positive par passage à la limite des inégalités).

Pour $z \neq 0$, posons $u_n = |a_n z^n| > 0$ à partir d'un certain rang. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\to} |z|\ell$ (ou $+\infty$ si $\ell = +\infty$). Notons R le rayon de convergence cherché.

— Dans le cas $\ell = +\infty$, $\sum a_n z^n$ diverge pour tout $z \neq 0$ d'après le théorème précédent, donc $R = 0$.

— Dans le cas $\ell = 0$, $\sum a_n z^n$ converge pour tout z d'après le théorème précédent donc $R = +\infty$.

— Dans le cas $\ell \in]0, +\infty[$, on a $\sum a_n z^n$ converge absolument dès que $|z|\ell < 1$ ie $|z| < \frac{1}{\ell}$ et donc $R \geqslant \frac{1}{\ell}$.
De plus $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement dès que $|z|\ell > 1$ ie $|z| > \frac{1}{\ell}$ et donc $R \leqslant \frac{1}{\ell}$. Finalement, $R = \frac{1}{\ell}$. ∎

II Propriétés de la somme, cas réel

Dans cette partie, on note $\sum a_n x^n$ les séries entières et on considère que x est réel (peu importe pour les a_n). Ainsi, si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est de rayon $R > 0$ on considère la fonction (qui est la somme de la série) $f : \begin{cases}]-R, R[& \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{cases}$. Le domaine de définition peut éventuellement être fermé en $\pm R$ suivant les cas.

II.1 Intégration

II.1.1 Théorème

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors f est continue sur son domaine de convergence (qui inclut $]-R, R[$, les bornes pouvant éventuellement être fermée en $\pm R$).

Preuve.
Cette preuve est hors programme...

Traitons d'abord le cas $a \in]-R, R[$ Montrons que $f(x) \underset{x\to a}{\to} f(a)$. Il s'agit d'un résultat d'inversion de limites.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $S_N : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$. Alors, pour $x \in]-R, R[$, $S_N(x) - S_N(a) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n(x^n - a^n) = (x-a)\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$. Ainsi

$$|S_N(x) - S_N(a)| \leqslant |x-a| \sum_{n=1}^{N} |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |a^k|$$

On se restreint maintenant à des valeurs de x dans $[a-\alpha, a+\alpha]$ pour un α bien choisi (de telle manière que cette intervalle soit inclus dans $]-R, R[$).

Soit $b \in]-R, R[$ tel que $|b| > \max(|a-\alpha|, |a+\alpha|)$.

Alors $|S_N(x) - S_N(a)| \leqslant |x-a| \sum\limits_{n=1}^{N} n a_n |b|^n$. D'après I.3.8, la somme partielle du majorant converge vers $K \in \mathbb{R}^+$ qui ne dépend pas de x (seulement de α, qui lui ne dépend que de a). Par passage à la limite en faisant $N \to +\infty$, $|f(x) - f(a)| \leqslant |x-a|K$ et donc par encadrement (cette fois $x \to a$), $f(x) \underset{x\to a}{\to} f(a)$.

Il reste à traiter le cas $a = R$ lorsque f est définie en R (le cas $a = -R$ est tout à fait similaire). On peut prendre, dans la preuve précédente, $b = R$ et les arguments restent les mêmes. ■

Exercice 1
Soit f une fonction définie par une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de convergence $R = +\infty$ avec $a_0 < 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\} a_n > 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois.

II.1.2 Exemple

Posons $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$. Alors $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^*, \mathbb{R})$. De plus, pour $x \neq 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1}$ et aussi pour $x = 0$. Donc f est bien la somme de cette série entière sur $\mathbb{R}$ en entier et donc f est continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

II.1.3 Théorème (Intégration terme à terme)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$$\forall x \in]-R, R[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Remarquons que les séries entières qui interviennent ici sont de rayon de convergence R exactement d'après I.3.8

Preuve.
Encore une fois hors programme.

Soit $x \in]-R, R[$ et t entre 0 et x. Soit également $N \in \mathbb{N}$.

$\displaystyle\int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^n$. Il s'agit encore une fois de pouvoir faire tendre N vers $+\infty$.

Or

$$\left| \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t \right| = \left| \int_0^x \left(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \right) \mathrm{d}t \right|$$
$$= \left| \int_0^x \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t \right|$$

On voit apparaître des restes de séries numériques absolument convergentes, appliquons l'inégalité triangulaire (sur l'intégrale et la série, on conserve la valeur absolue extérieure au cas où $x \leqslant 0$).

$$\left| \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_0^x \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||t|^n \right) \mathrm{d}t \right|$$

Or, pour t entre 0 et x, $|a_n||t|^n \leqslant |a_n||x|^n$. De plus, $\sum a_n x^n$ converge absolument donc on peut trouver N_0 tel que $\forall N \geqslant N_0$ $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||x|^n \leqslant \varepsilon$ pour un $\varepsilon > 0$ fixé.

Alors, pour ces N, $\left| \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x \sum_{n=0}^{N} a_n t^n \mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_0^x \varepsilon \mathrm{d}t \right| = \varepsilon |x|$ qui peut être rendu arbitrairement proche de 0.

Ainsi, $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+1} x^n = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. ■

II.1.4 Exemple

Posons $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, qui est la somme d'une série entière de rayon 1.

Ainsi, pour $x \in]-1, 1[$ on a $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = [-\ln(1-t)]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Après un changement d'indice, on obtient la formule (à connaître et à savoir retrouver)

$$\forall x \in]-1, 1[\ -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

De plus, $-x \in]-1, 1[$ ssi $x \in]-1, 1[$ (on veut changer x en $-x$ dans la formule précédente, on calcule le nouveau domaine de validité, ie. le nouveau domaine de convergence) et donc

$$\forall x \in]-1, 1[\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

Remarquons que cette dernière série converge en $x = 1$ (c'est une série alternée classique) et donc on peut fermer l'intervalle de convergence en 1 et on obtient

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Exercice 2
Exprimer $\arctan(x)$ comme somme d'une série pour $x \in]-1,1[$.

Exercice 3
Pour quels x peut-on écrire $\ln(1+2x)$ sous forme d'une série entière ?

Réponse : $x \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

II.2 Dérivation

II.2.1 Théorème (Dérivation terme à terme)
Soit f la somme de la série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et pour $x \in]-R,R[$ on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

et plus généralement

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall x \in]-R,R[\ f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Remarquons que les série entière qui définissent f' et les $f^{(k)}$ sont également de rayon de convergence R.

Preuve.
Hors programme.

Posons, au hasard, $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ qui est bien définie sur $]-R,R[$, continue et que l'on peut intégrer terme à terme d'après le théorème II.1.3. Alors pour $x \in]-R,R[$, $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t = f(x) - a_0$ et donc f est une primitive de g.

Ainsi f est dérivable et $f' = g$.

Le reste est une récurrence simple ∎

II.2.2 Exemple

Calculons $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ après avoir prouvé sa convergence.

Premièrement la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ est de rayon de convergence 1. Notons $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sa somme. Sa dérivée est $f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$.

Comme $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, S est bien la somme d'une série convergente et $S = f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4$.

II.2.3 Exemple

Posons $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\arctan(x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par quotient dont le dénominateur ne s'annule pas.

De plus, pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$. Cette relation est encore vraie en 0. Ainsi $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[,\mathbb{R})$ et finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.2.4 Corollaire
Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme. Alors $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.2.5 Taylor

Nous ne sommes pas si étonnés de ce résultat. On retrouve les coefficients du développement de Taylor de f (qui est $\mathcal{C}^\infty$) en 0.

II.2.6 Corollaire ("Identification" (unicité) des coefficients)
Les coefficients d'une série entière de **rayon non nul** sont uniques.

Plus précisément, si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont de rayons non nuls et vérifient pour un $\alpha > 0$ que

$$\forall x \in]-\alpha,\alpha[\ \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = b_n$.

II.2.7 Application importante

Si une série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon $R > 0$ et vérifie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$ pour $x \in]-R, R[$ alors tous ses coefficients sont nuls.

II.2.8 Exemple

Cherchons une fonction f somme d'une série entière qui vérifie $f' = f$. Notons $\sum a_n x^n$ la série cherchée de rayon $R > 0$ (inconnu pour l'instant).

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ pour tout $x \in]-R, R[$. Alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$. Par récurrence immédiate $\forall n \geqslant 1$ $a_n = \frac{1}{n!} a_0$ et $f = a_0 \exp$ qui est bien de rayon $R = +\infty > 0$. On a vérifié a posteriori que l'hypothèse faite sur le rayon est cohérente avec le résultat obtenu.

III Développement en série entière

III.1 Fonctions développables

III.1.1 Définition

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I tel que $0 \in I$ et 0 n'est pas une borne de I. Le **développement de Taylor** de f est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

III.1.2 Exemple

On a déjà vu que exp est la somme de son développement de Taylor sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On a même prouvé que $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ (ce qui est cohérent avec ce chapitre, car le rayon de convergence de cette série entière, est $+\infty$.)

On pose alors, pour $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et le théorème sur le produit de Cauchy montre qu'on a bien $e^{a+b} = e^a e^b$ pour tous complexes a, b.

III.1.3 Définition

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ où I est intervalle qui contient 0 (et 0 n'est pas une borne de I). On dit que f est **développable en série entière** (au voisinage de 0) ssi il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ tels que :

— $]-r, r[\subset I$

— $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est de rayon $R \geqslant r$

— $\forall x \in]-r, r[$ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Autrement dit, f est la somme d'une série entière sur un intervalle $]-r, r[\neq \emptyset$ contenu dans I.

La série entière $\sum a_n x^n$ est appelée **développement en série entière** de f.

III.1.4 Résumé

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$.

1. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.
2. Le développement en série entière est unique sur $]-r, r[$ et il s'agit du développement de Taylor de f.
3. Toute primitive de f est développable en série entière sur $]-r, r[$.
4. Les dérivée successives de f sont développables en série entière sur $]-r, r[$.

III.1.5 Remarque

Il existe des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sans être développable en série entière. Par exemple $f : x \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ prolongée en 0 par $f(0) = 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (par récurrence, et application précise du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$). Par contre sa série de Taylor est nulle et donc f ne coïncide avec cette série sur aucun intervalle infini centré en 0.

III.1.6 Parité

Si f est DSE et paire, alors les a_{2n+1} sont nuls. Si f est impaire, les a_{2n} sont nuls.

Pour obtenir ce résultat, on utilise l'unicité des coefficients sur l'égalité $f(-x) = f(x)$ ou sur l'égalité $f(-x) = -f(x)$.

III.2 Développements en pratique

Dans les preuves des résultats qui suivent se trouvent les méthodes principales pour prouver qu'une fonctions est développable et calculer son développement.

III.2.1 Exemple

Donner le DSE (si possible) de $f : x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$ qui est définie sur $]-\infty, -1[$. Soit $x \in]-1, 1[$ (dans l'intervalle de convergence des deux séries entières que l'on voit apparaître ici).

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$$

A priori ce produit de Cauchy a un rayon de convergence $R \geqslant 1$ (cf théorème I.3.6) Or $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} = (H_n)_{n\geqslant 1}$ diverge donc la suite $(H_n 1^n)$ n'est pas bornée. Ainsi $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$ et f est développable sur $]-1, 1[$.

Remarque : on ne pouvait pas espérer beaucoup plus pour un DSE, vu que f est définie sur $]-\infty, 1[$. Ceci n'empêchait pas a priori la série entière d'avoir un rayon plus grand que 1...

III.2.2 Proposition
sin et cos sont développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Preuve.
Prouvons le pour cos.

Premièrement, le rayon de convergence de la série considéré est $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors $|\cos^{(N+1)}| \leqslant 1$ sur tout intervalle et d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et x :

$$\left|\cos(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}\right| \leqslant \frac{|x^{2N+1} \times 1}{(2N+1)!}$$

Par croissances comparées $\frac{|x^{2N+1}|}{(2N+1)!} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ et cos coïncide bien avec son développement de Taylor sur $\mathbb{R}$. ■

III.2.3 Formules d'Euler

Montrons que pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } \sin(x) = \frac{e^{-ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n i^n x^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!}(1 + (-1)^n) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} x^{2k}}{(2k)!} \times 2 \end{aligned}$$

où on a remarqué que $1 + (-1)^n$ vaut 0 lorsque n est impair et 2 lorsque n est pair.

De plus, pour $k \in \mathbb{N}$, $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$. Finalement

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos(x)$$

d'après la proposition précédente.

III.2.4 Proposition
sh et ch sont développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Preuve.
Similaire. A faire en exo. On peut également utiliser les opérations sur les DSE en remarquant que $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. ■

III.2.5 Proposition
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Le coefficient de x^n est un quotient d'un produit de n termes par $n!$.

Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence est $+\infty$ et le développement est en fait une somme finie.

Preuve.
Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y(0) = 1 \\ (1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0 \end{cases}$. Clairement f_α est solution sur $]-1, +\infty[$. On considère que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

— Analyse Cherchons maintenant une solution g somme d'une série entière de rayon $R > 0$, $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Alors

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x)-\alpha g(x)=0 &\iff (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\ &\iff \sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^{n}-\alpha\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n-\alpha)a_nx^n=0\\ &\iff \sum_{n=0}^{+\infty}((n+1)a_{n+1}+(n-\alpha)a_n)x^n=0\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'une série entière (valable car $R>0$), on obtient la relation : $\forall n\in\mathbb{N}\ a_{n+1}=\frac{\alpha-n}{(n+1)}a_n$. De plus, on doit avoir $g(0)=1$ c'est à dire $a_0=1$. Par récurrence immédiate, $a_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}$.

— Synthèse

Considérons la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_nx^n$ où $a_n=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!}\neq 0$ et $a_0=1$. Calculons le rayon de convergence R de cette série. Pour $x\neq 0$ on a

$$\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=\frac{|\alpha-n|}{n+1}|x|\underset{n\to+\infty}{\to}1\times|x|$$

Aucun besoin de simplifier le quotient, c'est la relation de récurrence qui donne le résultat.

Ainsi si $|x|>1$ la série entière diverge et donc $R\leqslant 1$. De plus, si $|x|<1$ la série converge et donc $R\geqslant 1$.

Finalement, $R=1>0$ et le calcul fait dans l'analyse montre que la fonction somme est solution du problème de Cauchy considéré sur $]-1,1[$.

Par unicité de la solution à un problème de Cauchy (sur un intervalle), f_α est développable en série entière sur $]-1,1[$. ■

III.2.6 Exemple

Soit $p\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$. Donnons le DSE de $x\mapsto\frac{1}{(1-x)^p}$ qui est de rayon 1 d'après le théorème précédent.

Nous devons calculer, pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(-p-k)=(-1)^n\prod\limits_{k=0}^{n-1}(p+k)=(-1)^n\frac{(n+p-1)}{(p-1)!}$ et le rayon de convergence est 1.

Ainsi, pour $x\in]-1,1[$

$$\frac{1}{(1-x)^p}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(n+p-1)!}{(p-1)!}\frac{1}{n!}(-1)^nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+p-1}{p-1}x^n$$

III.2.7 Exemple

Montrons que arcsin est DSE et donnons son développement.

$x\mapsto\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est DSE sur l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}|\ x^2\in]-1,1[\}=]-1,1[$. et on a pour $x\in]-1,1[$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2}-k)\frac{1}{n!}(-1)^nx^{2n}$$

(rappel : un produit vide vaut 1 par convention).

Or pour $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2}-k)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}\frac{-2k-1}{2}=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{2^nn!}$ par l'opération classique consistant à multiplier et diviser par le produit des nombres pairs entre 2 et $2n$.

Finalement, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^{2n}$. Par intégration terme à terme :

$$\arcsin(x)=\underbrace{0}_{\arcsin(0)}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n}x^{2n+1}$$

III.2.8 Formulaire

A savoir	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$x \in]-1,1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in]-1,1[$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$x \in]-1,1[$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)}{n!} x^n$	$x \in]-1,1[$
$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$x \in \mathbb{R}$
$\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$x \in \mathbb{R}$
A savoir refaire	
$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$x \in]-1,1[$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$x \in]-1,1[$
$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)4^n} x^{2n+1}$	$x \in]-1,1[$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$x \in]-1,1[$

Index