Devoir maison n°5

A rendre le 07/11

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

On note par convention $f^0 = Id_E$, f sera noté f^1, $f \circ f$ sera noté f^2, $f \circ f \circ f$ sera noté $f^3, \dots$.

Ainsi pour p entier strictement positif, $f^{p+1} = f \circ f^p = f^2 \circ f^{p-1} = \cdots = f^p \circ f$.

On note de plus, pour $k \in \mathbb{N}$, $K_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$ et $d_k = \dim(K_k)$.

Premier exemple

Dans cet exemple, $E = \mathbb{R}^2$ et f est l'endomorphisme de E défini par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. On note $D_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $D_2 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que f est le projecteur sur D_1 parallèlement à D_2.
3. Montrer que $K_1 \oplus I_1 = \mathbb{R}^2$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $K_p \oplus I_p = \mathbb{R}^2$.

Deuxième exemple

$E = \mathbb{R}_3[X]$. On note m un paramètre réel. Soit f_m l'application définie par $\forall P \in E\ f_m(P) = P' + mP$.

1. Montrer que f_m définit un endomorphisme de E.
2. Calculer, suivant la valeur de m, le rang de f_m.
3. Déterminer, suivant les valeurs de m, $\ker(f_m)$ et $\mathrm{Im}(f_m)$.
4. Suivant les valeurs de m, déterminer le plus petit entier p vérifiant $K_p \oplus I_p = E$.

Cas général

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n avec $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E.

1. Si f est un automorphisme de E quels sont les entiers p vérifiant $\mathbb{K}_p \oplus I_p = E$?
   On suppose maintenant que l'endomorphisme f n'est pas bijectif.
2. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $K_k \subset K_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
3. Que peut-on dire de la suite (d_k) ? En déduire qu'il existe un entier k strictement positif tel que $K_k = K_{k+1}$.
   On note p le plus petit entier strictement positif vérifiant cette égalité des noyaux. Vérifier que $p \leqslant n$.
4. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}\ K_{p+r} = K_p$.
5. A l'aide du théorème du rang, montrer que $\forall r \in \mathbb{N}\ I_{p+r} = I_p$.
6. Montrer que K_p et I_p sont supplémentaires dans E.

Troisième exemple

$E = \mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de E définit par $\forall (x, y, z) \in E\ f(x, y, z) = (x - z, -x - 2y + 3z, -y + z)$.

1. Déterminer **un** vecteur ε_1 tel que $f(\varepsilon_1) = 0$, puis déterminer **un** vecteur ε_2 tel que $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$, puis déterminer **un** vecteur ε_3 tel que $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.
2. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E.
3. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
   Déterminer alors des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ que l'on exprimera à l'aide des vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Peut-on choisir $p = 1$?
4. Étudier de la même façon f^2 et f^3 pour en déduire la valeur de l'entier p (le plus petit entier tel que $K_p \oplus I_p = E$).

Quatrième exemple : partie optionnelle

Dans cette partie, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit f l'application linéaire qui à une suite u associe la suite v définie par $\forall i \in \mathbb{N}\ v_i = u_{i+1}$.

1. Déterminer les ensembles K_1 et I_1. On montrera en particulier que f est surjective.
2. Déterminer K_2 et I_2 puis pour $k \in \mathbb{N}^*$, K_k et I_k.
3. Existe-t-il un entier p vérifiant $\mathbb{K}_p \oplus I_p = E$? Que peut-on en déduire pour $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Indications

Premier exemple

1. Rappelons que si (e_1, e_2) est une base de E alors $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$ d'après les rappels fait dans le cours sur les espaces stables
2. On pourra éventuellement calculer la matrice A de f dans la base canonique et montrer que $A^2 = A$ pour se servir du théorème 2 du chapitre 4 (l'utilisation de ce théorème est obligatoire si on ne veut pas calculer l'expression de la projection par la méthode vue en cours).
3. Calculer f^p pour $p \geqslant 1$ avant tout.

Deuxième exemple

1. Il faut montrer la linéarité ++ le fait que $f(P) \in E$ c'est à dire que $f(P)$ est encore de degré 3 ou moins.
2. On pourra calculer la matrice de f_m dans la base canonique. Il y a une valeur particulière de m
3. On connaît déjà les dimensions, mais il faut encore distinguer suivant les valeurs de m
4. Dans le cas $m = 0$, il faut calculer l'expression des endomorphismes $f^2 = f \circ f, \ldots$

Cas général

1. Pour une bijection on connaît à la fois le noyau et l'image.
2. Ces inclusions sont classiques, voir le TD (vrai/faux)
3. Théorème : une suite d'entier qui converge est en fait stationnaire (c'est à dire est constante à partir d'un certain rang). on le montre en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ dans la définition.
   Le fait que p soit le plus petit donne une propriété sur les entiers $0 = d_0, d_1, \ldots, d_p$ qui permet de montrer que $p \leqslant n$.
4. Procéder par récurrence, et pour l'hérédité, on doit montrer une inclusion de noyaux qui est vraie grâce au cas $r = 1$ de la question précédente.
5.
6. Utiliser la caractérisation : somme des dimensions + intersection qui est l'espace nul.

Troisième exemple

Vous pouvez écrire plutôt des colonnes

1. Noter qu'on demande à chaque fois une solution, pas toutes les solutions.
2. Liberté + cardinal + dimension OU rang OU déterminant.
3. On doit trouver une matrice avec seulement deux coefficients non nuls.
4. Calculer les matrices, puis en déduire les noyaux et images.