

Calcul de rayon

Exercice 1

On considère une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ d'une variable réelle x . On note R son rayon de convergence.

1. Si on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n 2^n$ est convergente, que dire de R ?
2. Si on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n 2^n$ est divergente, que dire de R ?
3. Si on suppose que $\sum_{n \geq 0} a_n 3^n$ converge, mais ne converge pas absolument, que dire de R ?

Exercice 2

Calculer le rayon de convergence de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ lorsque :

- a) $a_n = 2 + ni$ b) $a_n = \frac{\operatorname{sh} n}{\operatorname{ch}^2 n}$ c) $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 0$ d) $a_n = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)^n$
- e) $a_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ f) $a_n = n^{\ln(n)}$

Exercice 3

Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières suivantes :

- a) $\sum_{n \geq 0} n! z^n$ b) $\sum_{n \geq 0} n! z^{n^2}$ c) $\sum_{n \geq 0} z^{n!}$

Calcul de somme

Exercice 4

1. Déterminer le rayon de convergence R et calculer pour tout $x \in]-R, R[$, la somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)x^n.$$

INDICATION : on pourra décomposer le facteur de x^n selon la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), \dots)$

2. Mêmes questions lorsque $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n$.

Exercice 5

Prouver la convergence et calculer la somme de $\sum_{n \geq 0} (n+1)p(1-p)^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$ où $p \in]0, 1[$.

Exercice 6

Soit $a \geq 0$. Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \operatorname{ch}(na)x^n$, $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(na)x^n}{n!}$

Exercice 7

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes ($x \in \mathbb{R}$) :

$$a) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{n+1} \quad b) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{(2n)!} \quad c) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n+2}{n+1} x^n \quad d) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n! \times (2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3 \times 1}.$$

Exercice 8

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On fixe $r \in [0, R[$.

$$\text{Calculer } \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta.$$

Développements

Exercice 9

Montrer que $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x}$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 10

Donner le développement en série entière (DSE) au voisinage de 0 ($x \in \mathbb{R}$) des fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série entière obtenue :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2+x}$
2. $f_2 : x \mapsto \ln(4-x^2)$.
3. $f_3 : x \mapsto \ln(x^2 + 5x + 4)$.
4. $f_4 : x \mapsto e^x \sin(x)$
5. $f_5 : x \mapsto \operatorname{sh}(x) \cos(x)$.
6. $f_6 : x \mapsto \int_x^1 \frac{\cos(t)-1}{t} dt$.

Exercice 11

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on étudie la série entière $\sum_{n \geq 1} S_n x^n$. On note R son rayon de convergence.

1. Démontrer que $R = 1$. On pourra encadrer S_n .
2. Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n x^n$. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$ on a

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

3. En déduire une expression simple de f .

Exercice 12

On cherche les solutions développables en série entière sur un domaine $] -R, R[\subset \mathbb{R}$, $R > 0$, de l'équation différentielle :

$$\forall x \in] -R, R[\quad (1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1 \quad (\text{E})$$

sous la forme

$$\forall x \in] -R, R[\quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où, pour tout entier naturel n , a_n est un réel. On pose : $a_0 = \lambda \in \mathbb{R}$.

1. Que vaut a_1 ?
2. Donner, pour tout entier naturel non nul n , une relation de récurrence reliant a_{n+1} et a_{n-1} .
3. Exprimer, pour tout entier naturel p , a_{2p} et a_{2p+1} en fonction de p et λ .

Exercice 13

Développer en série entière de la fonction de la variable réelle f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x \cos(\alpha) + 1}$$

On précisera l'ensemble de définition de f et on discutera selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

INDICATION : on pourra écrire $1 - 2x \cos(\alpha) + x^2 = (x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})$ et chercher

$$a, b \text{ tels que } f(x) = \frac{a}{x - e^{i\alpha}} + \frac{b}{x - e^{-i\alpha}}.$$

Exercice 14

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f d'une variable réelle définie

$$\text{par } f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(2n+1)}$$

2. Calculer la dérivée seconde de $x \mapsto x^2 f(x^2)$ pour x appartenant à l'intérieur de D .
3. En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice 15

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}$.

1. Établir la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)a_{n+1} = 2(2n-1)a_n$$

2. Donner le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$. On note f sa somme.
3. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on explicitera.
4. En déduire f .