Devoir maison n°6

A rendre le 14/11/2023

Exercice 1
Pour $n \geqslant 2$ entier, on pose

$$a_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n x^n$.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ on a

$$\int_2^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{n-1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

   En déduire un équivalent de a_n puis retrouve la valeur de R par comparaisons.
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n R^n$ diverge.
4. Soit $x \in]-R, R[$. On pose

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$$

   (a) Calculer $(1-x)S'(x)$ pour tout réel $x \in]-R, R[$.
   (b) En déduire une expression explicite de $S(x)$ lorsque $x \in]-R, R[$.
5. ($\star$) Pour aller plus loin
   (a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} a_n (-R)^n$ converge.
   (b) Calculer la valeur la valeur de $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$.
6. ($\star\star$) Et encore plus loin.
   (a) En utilisant un produit de Cauchy, montrer que $-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ est la somme d'une série entière sur $]-1, 1[$ et expliciter cette série.
   (b) Retrouver l'expression de S.
   (c) Écrire $\ln^2(2)$ comme somme d'une série convergente

Indications :

1. On pourra noter $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On peut ensuite utiliser d'Alembert ou un encadrement de a_n.
2. Nous avons déjà traité cette question plusieurs fois. Reste à retrouver où.
3. La méthode classique s'applique.
4. (a) Simplifier $(1-x)S'(x)$ pour reconnaître une série entière usuelle.
   (b) Il s'agit d'un calcul de primitive.
5. (a)
   (b) Utiliser précisément le théorème de continuité des séries entières.