

Devoir maison n°7

A rendre le 21/11

Exercice 1

On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-1}$.

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 + x - 1 = 0$. On désignera par λ_1 et λ_2 ses racines, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

Rappeler les valeurs de $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 \lambda_2$.

2. Une question sans lien avec la suite. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}} \lambda_2^n$ et calculer sa somme. La réponse ne fera pas apparaître de racine carrée au dénominateur.

3. (a) Déterminer deux réels α et β tels que :

$$\frac{1}{x^2 + x - 1} = \frac{\alpha}{x - \lambda_1} + \frac{\beta}{x - \lambda_2}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ un réel non nul. En factorisant le dénominateur par a , écrire $\frac{1}{x-a}$ sous forme d'une somme de série entière de la variable x . On précisera pour quels valeurs de x cette écriture est valable.

(c) En déduire une expression de $f(x)$ comme somme d'une série entière, en précisant pour quelles valeurs de x cette écriture est valable.

4. (★) On considère $n \in \mathbb{N}$.

(a) Rappeler la formule de Leibniz donnant la dérivée n ième du produit de deux fonctions u et v de classe \mathcal{C}^n .

(b) Quelle est la classe de f ? Sur quel domaine?

(c) En utilisant la relation $(x^2 + x - 1)f(x) = 1$, montrer que pour tout x dans un ensemble à préciser,

$$(x^2 + x - 1)f^{(n)}(x) + n(2x + 1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

dans le cas où $n \geq 2$.

5. (★★) En admettant que f est développable en série entière, retrouver le résultat de 3c

Indications

- 1.
2. Penser à la quantité conjuguée
3. (a) Voir les exemples de première année sur la décomposition en éléments simples.
(b) La condition doit porter sur $|a|$ car a n'est pas supposé positif.
(c) Attention, la condition se calcule précisément. Il faut savoir comparer $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2|$
4. (a)
(b) Ce domaine est une réunion.
(c) L'ensemble à préciser doit coïncider avec l'application de la formule de Leibniz que vous voulez faire. On peut prouver proprement qu'on peut l'étendre au domaine de la question précédente.
5. Il s'agit forcément de la série de Taylor de f que la question précédente doit permettre de calculer.