Table des matières

I Elements propres

I.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 1 (Valeur propre et vecteur propre)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f ssi il existe un $x \in E$ **non nul** tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel x **non nul** est appelé un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de f et noté $Sp(f)$.

Définition 2 (Vecteur propre et valeur propre)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $x \in E$. On dit que x est un vecteur propre de f ssi

$$\begin{cases} x \neq 0_E \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad f(x) = \lambda x \end{cases}$$

On dit que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

Proposition 1
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f \iff \ker(f - \lambda Id_E) \neq \{0_E\}$$

Définition 3
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A ssi il existe un $X \in \mathbb{K}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$. Un tel X **non nul** est appelé un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

En résumé : les valeurs propres et vecteurs propres de A sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'application linéaire canoniquement associée à A, $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$.

On note $Sp(A) = Sp(f_A)$ le spectre de A (l'ensemble de ses valeurs propres)

I.2 Espaces propres

Définition 4

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. L'espace propre associée à λ est l'espace $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda Id_E) = \ker(\lambda Id_E - f) \neq \{0_E\}$.

   Il s'agit de l'ensemble composé du vecteur nul et de tous les vecteurs propres associés à λ. On le note parfois aussi E_λ.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. L'espace propre associée à λ est l'espace $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) = \ker(\lambda I_n - A) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$.

Théorème 1
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots \lambda_p$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f. Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on pose v_i un vecteur propre associé à λ_i (il est donc non nul).
La famille $(v_1, \dots, v_p)$ est libre.

Théorème 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots \lambda_k$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de f.
La somme $\sum\limits_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$ est directe ie $\sum\limits_{i=1}^{k} E_{\lambda_i} = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$

I.3 Stabilité ($\star$)

Proposition 2
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Si D est une droite de E stable par f, alors D est dirigée par un vecteur propre de f.

Proposition 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de f. Alors $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Proposition 4
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont stables par g.
2. Tout espace propre de f est stable par g.

Evidemment, on peut échanger les rôles de f et g dans ces résultats.

Proposition 5
Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$.
Toute droite propre de f est aussi une droite propre pour g et toute droite propre pour g est une droite propre pour f.

II En dimension finie

II.1 Rappels sur la bijectivité et l'inversibilité

Proposition 6
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \neq 0$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
f \in GL(E) &\iff \text{l'image par f d'une base de } E \text{ est une base de } E \\
&\iff f \text{ est surjective } \iff \operatorname{Im}(f) = E \\
&\iff \operatorname{rg}(f) = n \\
&\iff f \text{ est injective } \iff \ker(f) = \{0_E\} \\
&\iff \exists g \in \mathcal{L}(E) g \circ f = Id_E \\
&\iff \det(f) \neq 0
\end{aligned}$$

Proposition 7
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A et $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.
On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
A \in GL_n(\mathbb{K}) &\iff (C_1, \dots C_n) \text{ est une base de } M_{n,1}(\mathbb{K}) \\
&\iff (L_1, \dots L_n) \text{ est une base de } M_{1,n}(\mathbb{K}) \\
&\iff \operatorname{rg}(A) = n \iff \operatorname{Im}(A) = \mathbb{K}^n \\
&\iff \forall Y \in \mathbb{K}^n \exists! X \in \mathbb{K}^n \; AX = Y \\
&\iff \ker(A) = \{0_{\mathbb{K}^n}\} \\
&\iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) AB = I_n \\
&\iff \det(A) = \neq 0
\end{aligned}$$

II.2 Polynôme caractéristique

Définition-Proposition 1
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est le polynôme χ_A associée à la fonction $\chi_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(xI_n - A) \end{array} \right.$.

χ_A est un polynôme **unitaire** (son coefficient dominant est 1) de **degré** n, la taille de A.

Proposition 8
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le coefficient constant de χ_A est $(-1)^n \det(A)$ et le coefficient de X^{n-1} est $-\operatorname{tr}(A)$. Ainsi

$$\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Ce résultat est également valable pour les endomorphismes.

Définition 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, où E est de dimension n. Le polynôme caractéristique χ_f de f est le polynôme associé à l'application $x \mapsto \det(xId_E - f)$. C'est un polynôme unitaire de degré n.

Si A est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$ quelconque de E alors $\chi_f = \chi_A$.

II.3 Lien avec les valeurs propres

Théorème 3
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$

1. λ est une valeur propre de f ssi $\chi_f(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_f.
2. λ est une valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$ ie λ est une racine de χ_A.

Théorème 4 (Rappel : d'Alembert-Gauss)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

— Si P est non constant, alors P possède un moins une racine dans $\mathbb{C}$.
— Si P est non nul, il possède exactement autant de racine dans $\mathbb{C}$ (comptées avec multiplicités) que son degré. On dit que P est **scindé**.

Conséquence ici : Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre.

Proposition 9 (Déterminant triangulaire par bloc)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, C sont des matrices carrées (de tailles quelconques, y compris 1). Alors $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

Théorème 5
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(f)$. Notons $\mu(\lambda)$ la multiplicité de λ comme racine de χ_f (on appelle cette quantité la multiplicité de la valeur propre λ).

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant \mu(\lambda)$$

Corollaire 1
Si λ est une racine simple de χ_A ou χ_f, alors E_λ est une droite.

III Diagonalisation

III.1 Diagonalisabilité

Définition 6

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est **diagonalisable** ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est diagonalisable ssi A est semblable à une matrice diagonale (il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$ et $A = PDP^{-1}$.)

Proposition 10
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de E composée de vecteurs propres de f.

Dans ce cas $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est diagonale et sa diagonale est composée des valeurs propres de f associées aux vecteurs propres de $\mathcal{B}$ (les valeurs propres sont dans l'ordre des vecteurs de $\mathcal{B}$).

Proposition 11
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est diagonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ composée de vecteurs propres de A. En notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c} \mathcal{B}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de A on a

$$D = P^{-1}AP \text{ est diagonale}$$

et la diagonale de D est composée des valeurs propres de A associées respectivement aux vecteurs propres de $\mathcal{B}$ (dans le même ordre).

On a alors $A = PDP^{-1}$.

Théorème 6
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est diagonalisable ssi $\bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(f)} E_\lambda = E$.

Théorème 7
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

f est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ssi χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et pour tout $\lambda \in Sp(f)$ on a $\dim(E_\lambda) = \mu(\lambda)$ (la multiplicité de λ en tant que racine de χ_f).

Proposition 12
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. SI χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples ALORS f est diagonalisable.

III.2 Applications

Théorème 8
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite et $p \geqslant 1$. On suppose qu'il existe $a_0, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+p} = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$.

1. Le polynôme $P = -\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k + X^p$ est appelé polynôme caractéristique de (u_n).
2. Si P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots \alpha_p$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \lambda_k^n$$

.

IV Trigonalisation

IV.1 Théorie

Théorème 9
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ ssi il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure (on dit que f est trigonalisable).

La diagonale est constituée de toutes les racines de χ_f, avec multiplicité (une racine de multiplicité r apparaît r fois sur cette diagonale).

Corollaire 2
1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A est semblable à une matrice triangulaire supérieure réelle ssi χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ ie il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $T = P^{-1}AP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.

IV.2 Conséquences pratiques

Proposition 13
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les racines (complexes) de χ_f non nécessairement distinctes.

1. $\text{tr}(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$
2. $\det(f) = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$

Le même résultat vaut pour les matrices.

IV.3 Deviner la dernière valeur propre