Table des matières

I Intégrales convergentes

I.1 Convergence en $+\infty$

Définition 1
Soit f une fonction continue sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente (en $+\infty$) et qu'elle vaut cette limite. Dans le cas contraire, on dit que cette intégrale est divergente.

On peut également noter $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$.

Proposition 1
La nature (convergente ou divergente) de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ne dépend pas de la valeur de la borne fermée a.

Proposition 2
Soit $k \in \mathbb{R}$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t$ converge en $+\infty$ ssi $k > 0$ et alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}$.

Théorème 1 (Intégrales de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha > 1$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est en particulier une intégrale **divergentes**

I.2 Convergence sur un intervalle quelconque

Définition 2
Soient $a < \boxed{b \leqslant +\infty}$ et $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ une fonction **continue**.

Si $\lim\limits_{x\to b} \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale **convergente** (ou convergente en b). Dans le cas contraire, l'intégrale est dite divergente.

Définition 3
Soient $\boxed{-\infty \leqslant a} < b$ et $f \in \mathcal{C}(]a, b], \mathbb{R})$. La borne ouverte est a.

Si $\lim\limits_{x\to a} \int\limits_x^b f(t)\mathrm{d}t$ existe et est finie on la note $\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et on dit que cette intégrale est une intégrale **convergente** (en a).

Proposition 3

$\int\limits_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut -1

Théorème 2 (Intégrales de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int\limits_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge ssi $\alpha < 1$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ est en particulier une intégrale **divergentes**.

Définition-Proposition 1
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$ (on peut avoir $a = -\infty$ et / ou $b = +\infty$). Soit $f \in \mathcal{C}(]a, b[, \mathbb{R})$.

S'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $\int\limits_a^c f$ et $\int\limits_c^b f$ sont des intégrales convergentes alors on dit que $\int\limits_a^b f$ converge (on a convergence à la fois en a et en b).

Dans ce cas on a $\forall c' \in]a, b[\ \int\limits_a^{c'} f + \int\limits_{c'}^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f$ et on note cette valeur $\int\limits_a^b f$.

Définition 4 (Notation)
Soit I un intervalle dont les bornes sont $a < b$. Ces bornes peuvent être ouvertes ou fermées. On note $\displaystyle\int_I f$ l'intégrale (classique ou généralisée) $\displaystyle\int_a^b f$.

Cette notation permet de ne pas préciser à priori la nature fermée ou ouverte des bornes.

Proposition 4 (Prolongement par continuité)
On se place dans le cas $f \in \mathcal{C}([a, b[, \mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}$ (ce n'est pas $+\infty$). Si on peut prolonger f par continuité en b (on note $\tilde{f}$ le prolongement), alors l'intégrale $\int\limits_a^b f$ converge et sa valeur est $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$ (qui est une intégrale sur un segment).

Le résultat s'applique encore lorsque c'est la borne inférieure qui est ouverte, voire lorsque les deux bornes sont ouvertes, si on peut prolonger à chaque borne.

II Propriétés des intégrales convergentes

II.1 Généralisation des propriétés

Proposition 5 (Linéarité des intégrales convergentes)

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent toutes les deux en b alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g)$ converge également en b et on a

$$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

Ce résultat est également valable dans le cas où la borne ouverte est la borne inférieure de l'intervalle d'intégration.

Proposition 6
Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions continues.

- Relation de Chasles : $\displaystyle\int_a^b f$ converge ssi pour tout $c \in [a, b[$, $\displaystyle\int_c^b f$ converge et alors $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Positivité : si $\forall t \in [a, b[\ f(t) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$.
- Croissance : si $\forall t \in [a, b[\ f(t) \leqslant g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b f, \int_a^b g$ convergent, alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Les mêmes propriétés sont encore valables pour les intégrales convergentes en la borne inférieure.

Théorème 3
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue, positive et telle que $\displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$ converge.

Si $\int_I f = 0$ alors $\forall x \in I\ f(x) = 0$.

II.2 Les outils de calcul

Théorème 4
Soient $f \in \mathcal{C}(]a,b[,\mathbb{R})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante.

$\int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales quand elles convergent.

Ce théorème s'applique aussi lorsque qu'une des deux bornes est a priori fermée.

Proposition 7
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$.

Théorème 5 (Intégration par parties)
Soient $u, v : [a,b[\to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $\lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x)$ existe et est finie alors $\int\limits_a^b u'v$ et $\int\limits_a^b uv'$ sont de même nature et en cas de convergence

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

où on a noté $[uv]_a^b = \lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

III Fonctions intégrables

III.1 Fonctions positives

Proposition 8
Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et **positive**.

$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une fonction majorée.

Proposition 9
Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

Si $\forall t \in [a,b[\ 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

III.2 Convergence absolue

Définition 5
Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que f est **intégrable** sur I ssi $\int\limits_I |f|$ converge, c'est à dire que $\displaystyle\int_I f$ est absolument convergente.

L'ensemble des fonctions continues et intégrables définies sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $L^1(I,\mathbb{K})$.

Théorème 6
Soit $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$. SI f est intégrable sur I ALORS $\int_I f$ converge.

Proposition 10 (Inégalité triangulaire)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

Si f est intégrable sur I alors $\left|\displaystyle\int_I f\right| \leqslant \displaystyle\int_I |f|$.

III.3 Comparaison

Théorème 7 (Comparaison)
Soient $f, g \in \mathcal{C}([a,b[,\mathbb{K})$ des fonctions continues.

1. Si $|f| \leqslant |g|$ au voisinage de b et g est intégrable en b alors f est intégrable en b.
2. Si $f = O_b(g)$ et g est intégrable en b alors f est intégrable en b.
3. Si $f = o_b(g)$ et g est intégrable en b alors f est intégrable en b.
4. Si $f \underset{b}{\sim} g$ alors f est intégrable en b ssi g est intégrable en b.

Le résultat vaut encore pour des fonctions définies sur $]a, b]$, à condition de prouver des relations de comparaison (ou une inégalité) en a.

Proposition 11
$L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : toute combinaison linéaire de fonctions intégrables est encore intégrable.

III.4 Intégration terme à terme

Théorème 8
Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point.
Soit $S : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si
— Il existe des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ continues et intégrables sur I telles que

$$\forall t \in I \ S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$$

(la convergence de la série pour chaque valeur de $t \in I$ fait partie de l'hypothèse à vérifier)
— La série $\sum \int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t$ converge

Alors S est intégrable sur I et

$$\int_I S(t) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \mathrm{d}t.$$

IV Exemples importants

IV.1 Intégrales classiques

IV.2 Application aux séries numériques

Théorème 9
Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}$) une fonction **continue, positive et décroissante.**

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t \text{ et } \sum_{n \geqslant n_0} f(n) \text{ ont la même nature}$$