

DM de l'avent

A rendre à chaque date indiquée, et la fin le 08/01/2024.

Pour le premier rendu, j'attends les questions 1 à 3e, c'est à dire que la question du jour n'est pas exigible.

Exercice 1

1. vendredi 01/12 : Soit E un espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Rappeler la définition de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et donner un lien entre $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}$) et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$ (les coordonnées dans $\mathcal{B}'$). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Donner le lien entre $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et P . On donnera X en fonction de X' et X' en fonction de X . De même pour M et M' .
2. 02/12 : Soient $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$ trois suites complexes. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$ et on pose $\forall n \in \mathbb{N} \ u_n = \lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n + \lambda_3 \gamma_n$.
Montrer que si $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont bornées alors (u_n) est bornée.
Rappel : (α_n) est bornée se traduit par l'existence d'une constante (ie indépendante de n) $M_a \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ |\alpha_n| \leq M_a$.
3. Une histoire de rennes.
Trois rennes notés A, B et C jouent à saute-renne¹ dans un grand champ. A saute par dessus B et se retrouve en position symétrique (par rapport à B). Puis B saute par dessus C et enfin C saute par dessus A (qui avait déjà bougé) et on recommence jusqu'à épuisement des joueurs.
On repère les positions de nos rennes, dans un repère orthonormé du plan, par leurs affixes complexes. Au départ l'axe de A est a_0 , celle de B est b_0 et celle de C est c_0 .
 - (a) 03/12 : Calculer a_1, b_1 et c_1 les affixes respectives de A, B et C au bout d'une phase de jeu. On pourra introduire des affixes de vecteurs.
 - (b) 04/12 : On pose $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$. Montrer que $X_n = M^n X_0$. On attend une preuve détaillée.
 - (c) 05/12 : Montrer que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\chi_M(z) = z^3 + 3z^2 - 5z + 1$.
 - (d) 06/12 : Donner les valeurs propres de M . Que peut-on déjà en déduire ?
 - (e) 07/12 : Déterminer une base de $E_1(M)$. On note $u \in \mathbb{C}^3$ le vecteur directeur de $E_1(M)$ qui a 1 comme première coordonnée.
 - (f) **Rendu 1** le 08/12 : On pose $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. D'après le cours, quelle est la dimension de $E_{-2+\varepsilon\sqrt{5}}(M)$? Quelle est la conséquence sur le système $MX = (-2 + \varepsilon\sqrt{5})X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$?
 - (g) 09/12 : Résoudre le système précédent et exhiber une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ constituée de vecteurs propres de M .
 - (h) 10/12 : Donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P telle que $M = PDP^{-1}$. On ne demande pas le calcul de P^{-1} .
Exprimer ensuite M^n puis X_n en fonction de P, D, P^{-1} .
 - (i) 11/12 : On pose $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix} = Y_n = P^{-1}X_n$ les coordonnées de X_n dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que les 3 suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont géométriques de raisons à préciser.
 - (j) 12/12 : Soit $q \in \mathbb{C}$. A quelle condition $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle bornée ?
 - (k) 13/12 : Donner une condition nécessaire et suffisante sur α_0, β_0 et γ_0 pour que $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) soient 3 suites bornées.
 - (l) 14/12² : Montrer que $(a_n), (b_n), (c_n)$ sont toutes les trois bornées ssi $(\alpha_n), (\beta_n)$ et (γ_n) sont toutes les 3 bornées.
 - (m) (★) **Rendu 2** le 15/12 : Montrer que nos 3 rennes restent dans une partie bornée du plan (ie. ne sortent pas de notre grand champ) ssi X_0 appartient à un certain plan vectoriel (sous espace de $\mathbb{C}^3$) dont on donnera une base ainsi qu'une équation cartésienne.

1. une variante du saute mouton classique

2. Question plus délicate. on se servira deux fois de la question du 02/12

Exercice 2

- 16/12 : Interlude graphique. Pour $t \in \mathbb{R}$ on pose $r(t) = \exp(\cos(t)) - 2 \cos(4t)$ et on considère la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = r(t) \sin(t) \\ y(t) = r(t) \cos(t) \end{cases}$$
 Donner une période de r puis étudier les éventuelles symétries du support de cette courbe.
- 17/12 : Poursuivons sur cette courbe. En python³, créer les variables :
 - **T** la liste contenant les flottants équirépartis entre 0 et 2π , de longueur 500.
 - **R** la liste contenant les valeurs de r en tous les temps contenus dans **T**.
 - **X** la liste correspondante pour la fonction x puis **Y**.

Il reste à utiliser `plt.plot(X, Y)` pour relier tous les points de notre support ainsi calculés et admirer le résultat de notre dur labeur.

Exercice 3

Pour n entier naturel non nul, on considère les intégrales

$$H_n = \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n}}{1+u^{4n}} du, \quad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{2n}} dx, \quad L_n = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\frac{1}{2n}} dx$$

- 18/12 : Étudier la convergence de l'intégrale H_n .
- 19/12 : Étudier la convergence des intégrales K_n et L_n .
- 20/12 : Soit $a > 0$. Donner, suivant la valeur de a , la monotonie de la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a^{\frac{1}{2n}}$.
- 21/12 : Montrer que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et étudier la monotonie de $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- 22/12 : Montrer que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(L_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (K_n + L_n) \geq \frac{\pi}{4}$$

- 23/12 : Effectuer, en le justifiant, le changement de variable $\tan x = u^{2n}$ dans l'intégrale $K_n + L_n$, puis donner une relation entre $K_n + L_n$ et H_n .
- 24/12 : En déduire qu'il existe une constante réelle H telle que

$$H_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{H}{n}$$

et donner la limite de la suite (H_n) .

3. On pourra avantageusement utiliser numpy

Indications

Exercice 1

1. Question de cours
2. Attention à la rédaction du raisonnement.
3. (a) La réponse est presque donnée à la question suivante. Justifiez !
 - (b)
 - (c)
 - (d) Il y a une racine évidente et les deux autres font intervenir $\sqrt{5}$.
 - (e)
 - (f) Répondre dans le cas général, ceci concerne les deux autres espaces propres.
 - (g) Résoudre avec la notation ε puis donner les deux vecteurs propres demandés.
 - (h)
 - (i) Trouver une relation entre Y_{n+1} et Y_n .
 - (j) (u_n) est bornée ssi $(|u_n|)$ est bornée.
 - (k)
 - (l) Deux implications ici.
 - (m) Pour l'équation : traduire la condition trouvée sur les α, β, γ en condition sur les a, b, c .

Exercice 2**Exercice 3**

- 1.
2. Quelle est la limite de $x^{\frac{1}{2n}}$ lorsque $x \rightarrow 0$? Bien lister les bornes ouvertes et fermées avant de se lancer ! Pour une étude en un autre point que 0, voir le cours !
3. 3 cas
4. Utiliser proprement la question précédente et la croissance de l'intégrale.
5. Il reste à vérifier une chose par suite. D'après mes calculs la constante $\frac{\pi}{4}$ convient à chaque fois, à vous le prouver (en utilisant le cours sur les fonctions puissance).
6. Identifier les intervalles en jeu pour x et u avant de trouver une bijection et sa réciproque ($x = \varphi(u)$, $u = \varphi^{-1}(x)$).
- 7.