Table des matières

Dans tout le chapitre, on s'intéresse exclusivement aux espaces $\mathbb{R}^n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition-Proposition

Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est défini par

$$(X|Y) = \langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T \times Y$$

Il possède les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $(u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geqslant 0_{\mathbb{R}}$.
4. Définie : $(u|u) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Notations : le produit scalaire canonique est noté au choix $(u|v), \langle u, v \rangle,$ ou $u \cdot v$.

Preuve.
La bilinéarité est évidente par la formule de produit matriciel.

De plus, $X^T Y$ est un nombre donc $(X^T Y)^T = Y^T X = \langle Y, X \rangle$.

Remarquer que $\langle X, X \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$ est une somme de réels positifs donc est forcément positive, et elle ne vaut 0 que si tous les termes sont nuls. ■

I.1.2 Exemple

Les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ sont de produit scalaire nuls dans $\mathbb{R}^4$.

I.2 Norme et distance

I.2.1 Définition

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

I.2.2 Proposition

Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ (Attention à la valeur absolue)
3. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$
4. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ (identité du parallélogramme)
5. $(x|y) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

Preuve.

1. Il s'agit de la traduciton de la dernière propriété du produit scalaire.
2. On a directement $\|\lambda u\|^2 = \lambda^2 \|u\|^2$ par double linéarité.
3. Par définition on a

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

et il suffit de regrouper en utilisant la symétrie.

4. Changer v en $-v$ dans la formule précédente puis sommer (en utilisant la linéarité du produit scalaire)
5. Simple transformation de formules. ■

I.2.3 Théorème (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \times \|v\|$
2. $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$ ssi u et v sont colinéaires et de même sens.

Preuve.
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ fixés.

On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (u+tv|u+tv) = \|u+tv\|^2 \end{array} \right.$.
Alors $f \geqslant 0$ par positivité du produit scalaire. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} f(t) &= (u+tv|u+tv) = (u|u+tv) + t(v|u+tv) \\ &= (u|u) + t(u|v) + t(v|u) + t^2(v|v) \\ &= \|u\|^2 + 2t(u|v) + t^2\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi f est une fonction polynomiale de degré au plus 2.

— Si $v \neq 0$ (ie $\|v\| \neq 0$), alors f est polynomiale de degré 2 et positive. Donc son discriminant est négatif : $\Delta = 4(u|v)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leqslant 0$, ce qui est l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

— Si $v = 0$, alors $(u|v) = 0$ et donc l'inégalité est vérifiée.

Dans le cas, $v \neq 0$, l'inégalité est une égalité ssi $\Delta = 0$ ssi f s'annule une fois ssi $\exists t \in \mathbb{R}\ u + tv = 0_{\mathbb{R}^n}$ (norme nulle). Ainsi u et v sont colinéaires

Dans le cas $v = 0$, l'égalité est tout le temps vérifié, tout comme le fait d'être colinéaire à 0. ■

I.2.4 Exemple
$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$ en prenant $X = \begin{pmatrix} \sqrt{1} \\ \vdots \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}$.

I.2.5 Corollaire (Minkowski)
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$

Preuve.
On a immédiatement, d'après Cauchy-Schwarz

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$$

Comme la fonction racine carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a l'inégalité voulue.

Il y a égalité ssi $(u|v) = \|u\|\|v\|$. Dans ce cas, on a d'après le théorème I.2.3, $u = \lambda v$ ou $v = 0$ et donc $\lambda\|v\|^2 = |\lambda|\|v\|^2$, ie $v = 0$ ou $\lambda \geqslant 0$. Dans les deux cas, u et v sont colinéaires de même sens. La réciproque est immédiate par le même calcul.

Pour le deuxième point, on applique l'inégalité triangulaire à $\|(u-v)+v\|$ et à $\|(v-u)+u\|$. Rappelons que $|x| \leqslant a$ ssi $x \leqslant a$ et $-x \leqslant a$ pour $x, a \in \mathbb{R}$. ■

I.2.6 Remarque

Faire un dessin : inégalité triangulaire.

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales

II.1.1 Définition
Soient $u, v, u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^n$.

1. On dit que u est unitaire (ou normé) ssi $\|u\| = 1 = \|u\|^2$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $\langle u, v\rangle = 0$. On note $u \perp v$.
3. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2\ \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Explication La notion d'orthogonalité repose maintenant sur le produit scalaire, contrairement à nos habitudes de 1ère année. On a pas du tout de notion d'angle.

II.1.2 Exemple
Montrer que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.

II.1.3 Passer à une famille orthonormale

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls. Alors $\left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthonormale.

II.1.4 Proposition
Soit $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est libre.

En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Preuve.
Supposons que $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i u_i = 0_E$. Alors en effectuant le produit scalaire par u_j on obtient $\lambda_j\|u_j\|^2 = 0$ (tous les autres termes sont nuls), d'où $\lambda_j = 0$. ■

II.1.5 Théorème (Pythagore)
Soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|u_i\|^2$$

Preuve.
On calcule cette fois $\langle \sum_{i=1}^{n} u_i, \sum_{j=1}^{n} u_j\rangle$ (noter le choix des indices muets différents, pour permettre le calcul de bilinéarité).

Il s'agit simplement de développer les deux sommes et identifier les termes nuls (tous, sauf lorsque les deux vecteurs concernés sont égaux). ■

II.2 Bases orthonormées

II.2.1 Théorème
Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormale** de $\mathbb{R}^n$. Soient $u, v \in E$.

1. $u = \sum_{i=1}^{n}(u|e_i)e_i$, c'est à dire que la coordonnée[1] de u sur le vecteur e_i est $(u|e_i)$.
2. On note $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $(y_1,\dots,y_n)$ les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$. Alors
$$(u|v) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \text{ et } \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)^2$$
3. Si on note $X = \mathrm{Mat}_B(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ (les colonnes des coordonnées), $(u|v) = X^TY$.

Preuve.
1. On a $u = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. Ainsi
$$(u|e_1) = x_1(e_1|e_1) + x_2(e_2|e_1) + \dots x_n(e_n|e_1) = x_1$$
(par linéarité du produit scalaire et orthogonalité de la famille).
2. On a par le même calcul $(u|v) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x|e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$. ■

II.2.2 Exemple
Montrer que la famille $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$ (pour le produit scalaire canonique).

Donner les coordonnées de $u = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ dans cette base. Faire le lien avec les matrices de passage.

II.2.3 Corollaire
Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormée** de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$.

Preuve.
On a en effet, pour un $j \in [\![1,n]\!]$ fixé $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n}(f(e_j)|e_i)e_i$ d'après le théorème précédent. ■

II.2.4 Mnémotechnie

Pour calculer la matrice de f dans $\mathcal{B}$, *a priori* on calcule les coordonnée de $f(e_j)$ pour trouver la $j$ème colonne. Utile pour se souvenir sur quel indice porte l'application de f.

II.3 Orthogonal d'un sev

II.3.1 Définition

Soient F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

1. On dit que $u \in \mathbb{R}^n$ est orthogonal à F ssi $\forall u_F \in F\ \langle u, u_F\rangle = 0$. On le note $u \perp F$
2. F et G sont dits orthogonaux ssi $\forall (u_F, u_G) \in F \times G\ \langle u_F, u_G\rangle = 0$. On note $F \perp G$

II.3.2 Exemple

Trouver un exemple dans $\mathbb{R}^2$. Preuve avec les bases, avec les équations.

II.3.3 Remarque

Si $F \perp G$ alors $F + G = F \oplus G$ car le seul vecteur orthogonal à lui même est le vecteur nul.

II.3.4 Proposition

Soient F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_s)$.

1. Soit $u \in E$, $u \perp F$ ssi $\forall i \in [\![1, r]\!]\ u \perp f_i$.
2. $F \perp G$ ssi $\forall i \in [\![1, r]\!] \forall j \in [\![1, s]\!]\ f_i \perp g_j$.

Il suffit de vérifier l'orthogonalité sur une famille génératrice pour prouver l'orthogonalité à un espace.

Preuve.

1. Si $x_F \in F$ alors $x_F = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i$ et on a $(u|x_F) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (u|f_i)$. Ceci prouve facilement la seule implication non triviale.
2. $\Rightarrow$ est triviale. Pour la réciproque, on a d'après le point précédent $f_i \perp G$ pour tout i. Par linéarité du produit scalaire, tout $u_F \in F$ est alors perpendiculaire à G, par le même calcul qu'au point précédent. ∎

II.3.5 Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E |\ \forall x_F \in F\ (x_F|x) = 0\}$.

$F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F.

II.3.6 Remarque

Si on a $G \perp F$ pour deux espaces alors, par définition de $F^\perp$, $G \subset F^\perp$.

II.3.7 Exemple

1. $\{0\}^\perp = E$, $E^\perp = \{0\}$.
2. Calculer l'orthogonal de la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$.

II.3.8 Attention

On considère D une droite de l'espace et F un sev de $\mathbb{R}^3$. On peut avoir $D \perp F$ sans que $F = D^\perp$. En particulier deux droites peuvent être orthogonales, mais l'orthogonal de D est un plan.

II.3.9 Proposition

Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$.

1. $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
2. $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$ ie F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F qui lui soit orthogonal. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F.

Preuve.

Le seul vecteur orthogonal à lui même est $0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $F \cap F^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Montrons que $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et que $\dim(F^\perp) = n - \dim(F)$. Soit $\mathcal{B}_F = (u_1, \ldots, u_r)$ une base de F et $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^r \\ u & \mapsto & \begin{pmatrix} \langle u, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle u, u_r\rangle \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

Par linéarité de chaque coordonnées, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r)$ et $F^\perp = \ker(f)$ d'après II.3.4. Ainsi $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Considérons $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_r$ la base canonique de $\mathbb{R}^r$. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_r}(f)$. Alors les lignes de M sont les coordonnées des u_i, notées en lignes (ou encore, $M^T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(u_1, \ldots, u_r)$). Ainsi elles forment une famille libre et $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(f) = r$.

D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(f) = n - \dim(\ker(f))$ et donc $\dim(F^\perp) = n - r$ comme voulu.

Ainsi $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$.

Finalement, si G est un supplémentaire de F tel que $G \perp F$ alors $G \subset F^\perp$ par définition de $F^\perp$ et $\dim(G) = \dim(F^\perp)$ (en tant que supplémentaires d'un même espace F) et donc $G = F^\perp$ ce qui prouve l'unicité voulue. ■

II.3.10 Exemple

1. Calculer le supplémentaire orthogonal de $D : 2x - y = 0$ (dans $\mathbb{R}^2$).
2. Dans $\mathbb{R}^3$, même question avec $D = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $P : 2x + z = 0$.

II.3.11 Exemple

Projection et symétrie dans le cas où $G = F^\perp$: illustration et traduction des conditions géométriques pour calculer p.

III Matrices particulières

III.1 Matrices orthogonales

III.1.1 Définition

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi $M^T M = I_n$. On a alors $MM^T = I_n$ et donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = M^T$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n.

III.1.2 Produit matriciel et produit scalaire

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons $C = AB$ et $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ les coefficients de A, B et C respectivement.

Alors, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

Notons de plus $L_1, \dots, L_n$ les colonnes de A et $C_1, \dots, C_n$ les lignes de B. Alors $L_i = (a_{i,1}\ a_{i_2}\ \dots\ a_{i_n})$ et $C_j = \begin{pmatrix}b_{1,j}\\ \vdots \\ b_{n,j}\end{pmatrix}$. Ainsi $c_{i,j} = L_i C_j = \langle {L_i}^T, C_j \rangle$.

III.1.3 Théorème

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. $M^T \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
4. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
5. Pour toutes colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
6. Pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\|MX\| = \|X\|$

Preuve.

— On a clairement 1) $\iff$ 2).

— D'après le point précédent, $M^T M = I_n$ ssi $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) en notant $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de M. Ainsi 1 $\iff$ 3).

— Grâce à 1) $\iff$ 2) on a 3) $\iff$ 4) immédiatement.

— Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. A priori $\langle MX, MY \rangle = (MX)^T MY = X^T M^T MY$.
Ainsi, si $M \in O_n(\mathbb{R})$ on a bien $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
Réciproquement, supposons que $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$ pour toute colonne X, Y. En notant $E_1, \dots E_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (sous forme de colonnes) on a ${E_i}^T (M^T M) E_j = \delta_{i,j}$ (car la base canonique est orthonormée).
Or pour une matrice $A = (a_{i,j})$, ${E_i}^T A E_j = a_{i,j}$ par calcul direct. Ainsi $M^T M = I_n$.
On a bien 1) $\iff$ 5).

— 5) $\Rightarrow$ 6) est trivial. La réciproque est la conséquence directe de l'identité de polarisation $\langle X, Y \rangle = \frac{\|X+Y\|^2 - \|X\|^2 - \|Y\|^2}{2}$ ■

III.1.4 Remarque

Pour toute matrice carrée M, on a $(MM^T)^T = MM^T$ (transposer chaque terme, et inverser l'ordre) et donc MM^T est une matrice symétrique.

Ainsi, si on veut évaluer ses coefficients, on en calcule seulement la "moitié" (précisément, $\frac{n(n+1)}{2}$ pour une matrice de taille n).

III.1.5 Exemple

1. $I_n \in O_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}6 & 3 & -2\\ -2 & 6 & 3\\ 3 & -2 & 6\end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.
3.
4. $A = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. Calculer A^{-1}.

III.1.6 Piège de vocabulaire

La matrice M est dite orthogonale ssi ses colonnes forment une famille orthonormale.

III.1.7 Proposition
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{B}$ est une base orthonormée ssi $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ (la matrice de passage) est orthogonale.

Preuve.
Simple traduction du théorème précédent. ∎

III.1.8 Changement de bases orthonormales

Soit $\mathcal{B}$ une BON de $\mathbb{R}^n$ et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$.
Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(X)$ sa colonne de coordonnées dans $\mathcal{B}$. Alors

$$X = PX' \text{ ie. } X' = P^{-1}X = P^T X$$

III.1.9 Proposition
L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

$O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit matriciel et par passage à l'inverse.

Preuve.
Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors $A^T = A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Si on a également $B \in O_n(\mathbb{R})$ alors $AB(AB)^T = ABB^TA^T = AI_nA^T = I_n$ et donc AB est orthogonale. ∎

III.1.10 Interprétation géométrique

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une BON dans la base canonique qui est orthonormale. Ainsi M^{-1} est la matrice de la base canonique dans une BON et c'est une matrice orthogonale.

III.1.11 Théorème
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) = \pm 1$

Preuve.
On a $\det(M) = \det(M^T)$ et $M^T = M^{-1}$. Ainsi $\det(M) = \frac{1}{\det(M)}$ et finalement $\det(M) = \pm 1$ ∎

III.1.12 Définition
$SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) | \det(M) = 1\}$.

On l'appelle groupe *spécial orthogonal*.

III.1.13 Exercice
Montrer que $SO(n)$ est stable par produit et passage à l'inverse.

III.1.14 Définition
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée).

On dit qu'elle est indirecte sinon.

III.1.15 Proposition
Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe et obtenir toujours la même valeur.

Preuve.
SI M est la matrice d'une famille dans une première BOND, la matrice dans la nouvelle BOND est $M' = PM$. Comme $\det(P) = 1$, $\det(M') = \det(P)\det(M) = \det(M)$. ∎

III.2 Matrices symétriques réelles

Rappel : Pour $X, Y \in \mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique peut se calculer par $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.

III.2.1 Définition
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi $A^T = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

III.2.2 Exercice
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est symétrique ssi $P^T AP$ est symétrique.

III.2.3 Proposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$.

Preuve.

1. Si A est symétrique, alors $\langle AX, Y\rangle = (AX)^T Y = X^T A^T Y = X^T AY = \langle X, AY\rangle$ pour tout $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.
2. Réciproquement, supposons que pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$ ie $X^T A^T Y = X^T AY$ Montrons que $A^T = A$.
   On a, pour tout X, Y, $X^T(A^T - A)Y = 0$ ou encore $\langle X, A^T - A)Y\rangle = 0$. Ainsi, pour Y fixé, $(A^T - A)Y$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ donc est nul. On a donc $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ $(A^T - A)Y = 0$ et donc $(A^T - A)$ est d'image nulle. C'est la matrice nulle.

On a prouvé de manière plus générale que $\langle AX, Y\rangle = \langle A^T X, Y\rangle$ et $\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^T Y\rangle$. ■

III.2.4 Théorème
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Preuve.

1. Hors programme. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (c'est possible dès que $n \geqslant 1$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss). Soit $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé. Alors $AX = \lambda X$.
   Alors $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$ car A est à coefficients réels (reprendre la formule de produit matriciel, et conjuguer chaque terme). On a alors $(AX)^T\overline{X} = \lambda X\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |z_i|^2$. De plus, $(AX)^T\overline{X} = X^T A\overline{X} = \overline{\lambda} X^T\overline{X} = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^n |z_i|^2$.
   Comme $\sum_{i=1}^n |z_i|^2 > 0$ on a bien $\overline{\lambda} = \lambda$.
2. Calculons $(AX_1|X_2)$ de deux manières. On a d'une part $(AX_1|X_2) = \lambda_1(X_1|X_2)$ et d'autre part $(AX_1|X_2) = (X_1|AX_2) = \lambda_2(X_1|X_2)$. Ainsi $(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1|X_2) = 0$ et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $(X_1|X_2) = 0$. ■

III.3 Théorème spectral

III.3.1 Théorème
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

— Les sous-espace propres de A sont orthogonaux deux à deux.

— A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice **orthogonale** $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

Preuve.
Hors programme.

Le polynôme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ car les valeurs propres de A sont réelles. Notons T une matrice triangulaire supérieure semblable à A via la matrice de passage P : $T = P^{-1}AP$. Toutes les matrices sont à coefficients réels.

On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$ des colonnes de P pour obtenir une famille orthonormale $\mathcal{B}'$ de matrice O dans la base canonique. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) = P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}') = \Delta O$ où Δ est triangulaire supérieure et O orthogonale.

On obtient $T = \Delta^{-1}O^{-1}AO\Delta$ ie $\Delta T\Delta^{-1} = O^T AO$ est à la fois une matrice symétrique et triangulaire supérieure. Elle est donc diagonale et A est semblable à une matrice diagonale !

III.3.2 Remarque

Si A est symétrique et f est son endomorphisme canoniquement associé, il existe une BON dans laquelle la matrice de f est diagonale.

III.3.3 Exemple
Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et la diagonaliser (dans une BON).

A est symétrique réelle donc est diagonalisable

- Remarquons que $\text{rg}(A) = 1$ et donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) = 1$ et donc 0 est racine simple de χ_A.
- De plus, la somme (avec multiplicité) des racines de χ_A vaut $\text{tr}(A) = 5$ et donc l'autre valeur propre est 5. On peut observer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples, et on retrouve le fait que A est bien diagonalisable
- Après calcul, $E_0(A) = \ker(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Les espaces propres de A sont orthogonaux car A est symétrique réelle. Donc $E_5(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

on en déduit qu'une base orthonormée de vecteur propre de A est $(\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et en posant $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ on a $A = PDP^{-1} = PDP^T$ car P est une matrice orthogonale.

III.4 Trouver une base orthonormée

III.4.1 Produit vectoriel

Diagonaliser dans une BON la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

la méthode du malin : $\text{rg}(A - I_3) = 2$ donc 1 est valeur propre double

A est symétrique réelle donc diagonalisable. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-4)$ (après calcul).

- L'espace propre associé à 1 est le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ dont une base est $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = (u_1, u_2)$.
- Comme les espaces propres de A sont orthogonaux, $E_4(A) = \text{Vect}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v}$ (un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$).

Nous avons un problème. On a bien $u_1 \perp v$ et $u_2 \perp v$ mais u_1, u_2 ne sont pas orthogonaux.

Posons $u_3 = u_1 \wedge v$; Alors $u_3 \perp v$ et donc $u_3 \in \mathcal{P}$ et sera à la fois orthogonal à u_1 et v.

Ainsi $(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ est une base orthogonale de vecteurs propres de A, qu'il suffit de normer pour trouver une base orthonormale.

III.4.2 Théorème (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Alors il existe une base $(u_1, \ldots, u_p)$ de F vérifiant

- $(u_1, \ldots, u_p)$ est orthogonale
- $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

On peut imposer $\|u_i\| = 1$, c'est à dire que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ soit orthonormale (il suffit de diviser u_i par $\|u_i\| \neq 0$). Si on impose de plus que $(e_k|u_k) > 0$ pour tout k, alors la famille obtenue est unique.

Preuve.
Dessin

On note F_k =$\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et on pose P_k : "il existe une famille orthogonale $(u_1, \ldots, u_k)$ telle que $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_k) = F_k$"

- P_1 est clairement vraie, il suffit de poser $u_1 = e_1$. (ou $\frac{e_1}{\|e_1\|}$).
  Il existe clairement un seul vecteur de $\text{Vect}(e_1)$ de norme 1 et tel que $(u_1|e_1) > 0$, et c'est $\frac{e_1}{\|e_1\|}$ (et on a $(e_1|u_1) = \|e_1\| > 0$).
- Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, on suppose que P_k est vraie.
  On remarque d'abord que $e_{k+1} \notin F_k$, d'après la liberté de la famille $(e_i)_i$. On cherche u_{k+1} sous la forme $e_{k+1} - x$, avec $x \in F_k = \text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$. On écrit donc $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} u_i$. On veut maintenant
  $$\forall i \in [\![1, k]\!] \ (e_{k+1} - x|u_i) = 0 \text{ ie } \forall i \in [\![1, k]\!] (e_{k+1}|u_i) - \alpha_{ik}\|u_i\|^2 = 0$$
  On pose donc $u_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{(e_{k+1}|u_i)}{\|u_i\|^2} f_i \neq 0$ car $e_{k+1} \notin F_k$. C'est un vecteur de F_{k+1} mais pas de F_k, donc $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_{k+1}) = F_{k+1}$.
  Tout vecteur de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_{k+1})$ qui n'est pas dans $\text{Vect}(e_1, \ldots e_k)$ s'écrit $\lambda e_{k+1} - x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $x \in F_k$. Ainsi d'après le calcul précédent tout vecteur orthogonal à tous les u_i pour $i \in [\![1, k]\!]$ est de la forme λu_{k+1}. Il existe un seul vecteur de norme 1 et tel que $(u|e_{k+1}) > 0$ dans $\mathbb{R} f_{k+1}$, c'est le vecteur $\pm \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|}$ (le signe étant choisi pour garder le produit scalaire positif).

— Par récurrence, une base orthogonale de F existe. ■

III.4.3 Exemple
On considère $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A = UU^T$. Diagonaliser A.

On trouve que 0 est valeur propre associée à un espace de dimension 3, $E_0(A) = \ker(A) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Comme $\text{tr}(A) = 7$ est également la somme des racines du polynôme caractéristique, 7 est racine. Nous savons que $E_7(A)$ est l'orthogonal de $E_0(A) : x - y - z - 2t = 0$ et donc $E_7(A) = \text{Vect}(U)$.

Trouvons une base orthogonale de A. On note u_1, u_2, u_3 les 3 vecteurs trouvés et on cherche une base v_1, v_2, v_3 orthogonale de $F = E_0(A)$.

On pose déjà $v_1 = u_1$. On cherche maintenant $v_2 \in E_0(A)$ orthogonal à v_1. On le cherche sous la forme $v_2 = u_2 - \alpha v_1$. Alors $v_2 \perp v_1 \iff \langle v_2, v_1 \rangle = 0 \iff \langle u_2, v_1 \rangle - \alpha \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \iff 1 - 2\alpha = 0 \iff \alpha = \frac{1}{2}$.

Ainsi $v_2 = u_2 - \frac{v_1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient.

On cherche maintenant v_3 orthogonal à la fois à v_1 et v_2 sous la forme $v_3 = u_3 - av_1 - bv_2$. Le même raisonnement donne $\langle u_3, v_1 \rangle - a \langle v_1, v_1 \rangle = 0$ ou encore $2 - 2a = 0$ ie. $a = 1$. De même $v_3 \perp v_2 \iff \langle u_3, v_2 \rangle - b \langle v_2, v_2 \rangle = 0 \iff 1 - \frac{3}{2}b = 0 \iff b = \frac{2}{3}$. Finalement

$$v_3 = u_3 - v_1 - \frac{2}{3}v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Index