Table des matières

I Produit scalaire et norme

I.1 Produit scalaire

Définition-Proposition 1
Le produit scalaire canonique de deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ est défini par

$$(X|Y) = \langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = X^T \times Y$$

Il possède les propriétés suivantes :

1. Bilinéaire : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$ $(\lambda u + \mu v|w) = \lambda(u|w) + \mu(v|w)$ et $(u|\lambda v + \mu w) = \lambda(u|v) + \mu(u|w)$.
2. Symétrique : $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $(u|v) = (v|u)$.
3. Positive : $(u|u) \geqslant 0_{\mathbb{R}}$.
4. Définie : $(u|u) = 0_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Notations : le produit scalaire canonique est noté au choix $(u|v), \langle u, v\rangle,$ ou $u \cdot v$.

I.2 Norme et distance

Définition 1

1. On appelle norme (euclidienne) d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.
2. On appelle distance (euclidienne) entre deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^n$ le réel positif $d(u, v) = \|v - u\| = \|u - v\|$.

Proposition 1
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\|u\| = 0_{\mathbb{R}} \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$
2. $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ (Attention à la valeur absolue)
3. $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$
4. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$ (identité du parallélogramme)
5. $(x|y) = \frac{\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2}{2} = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\| \times \|v\|$
2. $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$ ssi u et v sont colinéaires et de même sens.

Corollaire 1 (Minkowski)
Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$.

1. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v sont colinéaires de même sens (positivement proportionnels).
2. $|\|u\| - \|v\|| \leqslant \|u - v\|$

II Orthogonalité

II.1 Familles orthogonales

Définition 2
Soient $u, v, u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^n$.

1. On dit que u est unitaire (ou normé) ssi $\|u\| = 1 = \|u\|^2$.
2. u et v sont dits orthogonaux ssi $\langle u, v\rangle = 0$. On note $u \perp v$.
3. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale ssi les u_i sont orthogonaux deux à deux.
4. $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthonormale ssi elle est orthogonale et tous les u_i sont unitaires. Autrement dit $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \ \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Proposition 2
Soit $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ orthogonaux deux à deux et **tous non nuls**. Alors $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est libre.
En particulier, toute famille orthonormale est libre.

Théorème 2 (Pythagore)
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$$

II.2 Bases orthonormées

Théorème 3
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormale** de $\mathbb{R}^n$. Soient $u, v \in E$.

1. $u = \sum\limits_{i=1}^{n} (u|e_i)e_i$, c'est à dire que la coordonnée[1] de u sur le vecteur e_i est $(u|e_i)$.
2. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de v dans $\mathcal{B}$. Alors
$$(u|v) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \text{ et } \|u\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$$
3. Si on note $X = \mathrm{Mat}_B(u)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ (les colonnes des coordonnées), $(u|v) = X^TY$.

Corollaire 2
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base **orthonormée** de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j\in[\![1,n]\!]} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ a_{i,j} = (f(e_j)|e_i)$.

II.3 Orthogonal d'un sev

Définition 3
Soient F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$.

1. On dit que $u \in \mathbb{R}^n$ est orthogonal à F ssi $\forall u_F \in F \ \langle u, u_F\rangle = 0$. On le note $u \perp F$
2. F et G sont dits orthogonaux ssi $\forall (u_F, u_G) \in F \times G \ \langle u_F, u_G\rangle = 0$. On note $F \perp G$

Proposition 3
Soient F, G deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_r)$ et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \ldots, g_s)$.

1. Soit $u \in E$, $u \perp F$ ssi $\forall i \in [\![1,r]\!] \ u \perp f_i$.
2. $F \perp G$ ssi $\forall i \in [\![1,r]\!] \forall j \in [\![1,s]\!] \ f_i \perp g_j$.

Il suffit de vérifier l'orthogonalité sur une famille génératrice pour prouver l'orthogonalité à un espace.

Définition 4
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. L'orthogonal de F est $F^\perp = \{x \in E | \ \forall x_F \in F \ (x_F|x) = 0\}$.
$F^\perp$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F.

Proposition 4
Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$.

1. $F^\perp$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$.
2. $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^n$ ie F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.
3. $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F qui lui soit orthogonal. On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F.

1. ce résultat est très utile en physique

III Matrices particulières

III.1 Matrices orthogonales

Définition 5
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est orthogonale ssi $M^T M = I_n$. On a alors $MM^T = I_n$ et donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} = M^T$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonale de taille n.

Théorème 4
Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $M \in O_n(\mathbb{R})$.
2. $M^T \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Les colonnes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
4. Les lignes de M sont une BON de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire canonique.
5. Pour toutes colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle MX, MY \rangle = \langle X, Y \rangle$.
6. Pour toute colonne $X \in \mathbb{R}^n$ on a $\|MX\| = \|X\|$

Proposition 5
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{B}$ est une base orthonormée ssi $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ (la matrice de passage) est orthogonale.

Proposition 6
L'inverse d'une matrice orthogonale est orthogonale et le produit de deux matrices orthogonales est orthogonal.

$O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit matriciel et par passage à l'inverse.

Théorème 5
Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\det(M) = \pm 1$

Définition 6
$SO_n(\mathbb{R})$ (aussi noté $SO(n)$) est l'ensemble $\{M \in O(n) |\ \det(M) = 1\}$.

On l'appelle groupe *spécial orthogonal*.

Définition 7
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que cette base est directe ssi son déterminant dans la base canonique est strictement positif (c'est à dire vaut 1 dans le cas d'une base orthonormée).

On dit qu'elle est indirecte sinon.

Proposition 7
Effectuer un changement de base entre deux bases orthonormées directes ne modifie pas les déterminants (des familles ni des applications linéaires).

On retrouve ici la notion de produit mixte vu en géométrie de 1ère année. On peut calculer le déterminant d'une famille dans n'importe quelle base orthonormée directe et obtenir toujours la même valeur.

III.2 Matrices symétriques réelles

Définition 8
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi $A^T = A$. L'ensemble des matrices symétriques de taille n est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. C'est un espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

Proposition 8
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ssi pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle$.

Théorème 6
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Les valeurs propres de A sont réelles.
2. Si X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes, alors $X_1 \perp X_2$. Autrement dit, les sous espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

III.3 Théorème spectral

Théorème 7
Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle.

- Les sous-espace propres de A sont orthogonaux deux à deux.
- A est diagonalisable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) dans une base orthonormée, c'est à dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice **orthogonale** $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

III.4 Trouver une base orthonormée

Théorème 8 (Orthogonalisation de Gram-Schmidt)
Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Alors il existe une base $(u_1, \dots, u_p)$ de F vérifiant

— $(u_1, \dots, u_p)$ est orthogonale

— $\forall k \in [\![1, n]\!]$ $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

On peut imposer $\|u_i\| = 1$, c'est à dire que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ soit orthonormale (il suffit de diviser u_i par $\|u_i\| \neq 0$).
Si on impose de plus que $(e_k|u_k) > 0$ pour tout k, alors la famille obtenue est unique.