Table des matières

I Continuité

I.1 Domaines de définition

Définition 1
Soit $r \in [0, +\infty[$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. La boule ouverte de rayon r et de centre X_0 est $B(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p | \ \|X_0 - X\| < r\}$.
2. La boule fermée de rayon r et de centre X_0 est $\overline{B}(X_0, r) = \{X \in \mathbb{R}^p | \ \|X_0 - X\| \leqslant r\}$.

Définition-Proposition 1
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$. Les propositions suivantes sont équivalentes.

1. il existe $X_0 \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$ tels que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
2. pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^p$ il existe $r > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(X_0, r)$.
3. il existe $M \in R^+$ tel que $\forall X \in A \ \|X\| \leqslant M$.

Dans ce cas, on dit que A est une partie **bornée** de $\mathbb{R}^p$.

Définition 2
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. On dit que A est une partie **ouverte** de $\mathbb{R}^p$ (on dit aussi que A est un ouvert) ssi
$$\forall X_0 \in A \exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$$
2. On dit que A est une partie **fermée** de $\mathbb{R}^p$ ssi $\overline{A}$ (son complémentaire) est une partie ouverte.

Définition 3
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $X_0 \in \mathbb{R}^p$.

1. On dit que X_0 est un point intérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset A$. En particulier $X_0 \in A$.
2. On dit que X_0 est un point extérieur à A ssi $\exists r > 0 \ B(X_0, r) \subset \mathbb{R}^p \backslash A$. En particulier $X_0 \notin A$ et X_0 est intérieur au complémentaire de A.
3. On dit que X_0 est un point adhérent à A ssi $\forall r > 0 \ B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$. Cette fois on n'a pas forcément $X_0 \in A$. Par contre, X_0 n'est pas extérieur à A.
4. On dit que X_0 est un point frontière de A ssi X_0 est à la fois adhérent et pas intérieur à A.
De manière équivalente, pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B(X_0, r)$ a une intersection non vide avec l'intérieur et l'extérieur de A.

Proposition 1
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$. On note $B = \mathbb{R}^p \backslash A$ le complémentaire de A. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$

1. X_0 est intérieur à A ssi X_0 n'est pas adhérent à B.
2. X_0 est adhérent à A ssi X_0 n'est pas intérieur à B.
3. A est ouvert ssi tout point de A est intérieur à A.
4. A est fermé ssi tout point adhérent à A est un point de A.
5. Tout point de A est adhérent à A.
6. Tout point intérieur à A est un point de A.

I.2 Fonctions continues

Définition 4
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ et $f : A \to \mathbb{R}^n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit a un point adhérent à A. On dit que f admet ℓ comme limite en a ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x-a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)-\ell\| \leqslant \varepsilon$$
Il faut comprendre $\|x-a\|$ comme la norme dans $\mathbb{R}^p$ et $\|f(x)-\ell\|$ comme la norme dans $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in A \ \|x-a\| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| \leqslant \varepsilon$$
f est **continue** sur A ssi f est continue en tout point de A.

Proposition 2
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue où A est une partie de $\mathbb{R}^p$.

1. L'ensemble $\{X \in A;\ f(X) > 0\}$ est un ouvert.
2. Les ensembles $\{X \in A;\ f(X) = 0\}$ et $\{X \in A;\ f(X) \geqslant 0\}$ sont des fermés.

Théorème 1
Soit $f : A \to \mathbb{R}^n$ où $A \subset \mathbb{R}^p$.

1. On note $f = (f_1, \dots, f_n)$ les fonctions coordonnées de f. f est continue (en un point ou sur A) si et seulement si toutes les f_i sont continues.
2. Une somme de fonctions continues est continue, le produit d'une fonction continue par un réel est continue ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^n)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)
3. Si $n = 1$ (fonctions à valeurs réelles), le produit de deux fonctions continues est encore continue. L'inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas est continue.
4. Soit $g : U \to \mathbb{R}^m$ telle que $f(A) \subset U$. Si f et g sont continues alors $g \circ f : A \to \mathbb{R}^m$ est continue sur A.

Théorème 2 (Image d'un fermé borné)
Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ **fermée et bornée** et $f : A \to \mathbb{R}^n$

1. Si f est continue sur A, alors $f(A)$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.
2. Si $n = 1$ et que $f : A \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est bornée et atteint ses bornes : $\inf\limits_{x \in A}(f(x)) = \min\limits_{x \in A}(f(x))$ et $\sup\limits_{x \in A}(f(x)) = \max\limits_{x \in A}(f(x))$.

II Dérivées partielles

II.1 Dérivabilité

Définition 5

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R}^n \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) \end{array} \right.$ où $U \subset \mathbb{R}^p$. Soit $a = (x_0, y_0, z_0)$ un point **intérieur** à U.

On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x en $a = (x_0, y_0, z_0)$ ssi l'application partielle $x \mapsto f(x, y_0, z_0)$ (qui est définie sur un intervalle centré en x_0, car a est intérieur) est dérivable en x_0. Ce nombre dérivé est alors noté $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$ ou $\partial_1 f(x_0, y_0, z_0)$.

On définit de même $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Définition 6
Soit U un **ouvert** de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ssi f possède p dérivées partielles sur U et que ces fonctions de p variables sont continues sur U.

Définition 7
Soit $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ (remarquez le cas $n = 1$). Si f possède des dérivées partielles en $(x_0, y_0, z_0) \in U$, le gradient de f en (x_0, y_0, z_0) (noté $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0, z_0)$) est le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$.

En physique, le gradient est parfois noté ∇f

II.2 Taylor-Young

Théorème 3
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$. Pour (h, k) de norme "assez petite"

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}(\|(h, k)\|)$$

Corollaire 1
Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Définition 8
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U. Soit $X_0 = (x_0, y_0) \in U$.

Le plan $\mathcal{P}_0 : z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est le plan tangent à la surface représentative de f au point X_0.

Proposition 3 (Composition)
Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ (U ouvert) et $g : t \mapsto (x(t), y(t))$ une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans U.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\varphi = f \circ g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour $t \in I$

$$\varphi'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).$$

Proposition 4 (Composition, changement de variables)
On considère $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et V un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Si $g(V) \subset U$ et que les fonctions f, g sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Si on note $f : (u_1, \ldots, u_p) \mapsto f(u_1, \ldots, u_p)$ et $g : (x_1, \ldots, x_m) \mapsto g(x_1, \ldots, x_m)$ et $g = (g_1, \ldots g_p)$ les fonctions coordonnées, alors $f \circ g$ dépend des variables $x_1, \ldots, x_m$ et pour $i \in [\![1, m]\!]$ et $a \in V$

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)\frac{\partial f}{\partial u_j}(g(a))$$

Proposition 5 (Un exemple)
Avec les mêmes notations que la proposition précédente.

On note $f : (u, v) \mapsto f(u, v)$ et $g : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix}\alpha(x, y)\\ \beta(x, y)\end{pmatrix}$ (f, g sont des fonctions de deux variables et g est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$).

Alors $h = f \circ g : (x, y) \mapsto h(x, y) = f(\alpha(x, y), \beta(x, y))$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial u}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0)) + \frac{\partial \beta}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial v}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{\partial \alpha}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial u}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0)) + \frac{\partial \beta}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial f}{\partial v}(\alpha(x_0, y_0), \beta(x_0, y_0))\end{aligned}$$

Définition 9 (Dérivées d'ordre supérieur)
Comme pour les fonctions d'une variable, on peut évidemment continuer à dériver des dérivées partielles si elles sont dérivables. On introduit alors la classe $\mathcal{C}^2, \ldots$ et les justifications sont les mêmes que pour la classe $\mathcal{C}^1$

La notation est la suivante :
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Théorème 4 (Théorème de Schwarz)
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}x$ (et de même avec toutes les autres variables éventuelles).

II.3 Équations aux dérivées partielles

III Extrema

III.1 Points critiques

Définition 10
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs **réelles** et $A \subset \mathbb{R}^2$. Soit $a_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f possède un maximum local (resp. minimum local) ssi il existe un $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in A \cap \overline{B}(a_0, r)\ f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

(resp. $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$).

Définition 11
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $A \subset \mathbb{R}^2$. Un point a **intérieur** à A est appelé **point critique** de f ssi $\overrightarrow{grad}\, f(a) = \vec{0}$ (toutes les dérivées partielles s'annulent simultanément).

Proposition 6
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles et $U \subset \mathbb{R}^2$ un **ouvert**. Soit $X_0 \in U$.

Si f possède un extremum local en X_0 alors X_0 est un point crique de f.

III.2 Matrice hessienne

Théorème 5 (Taylor-Young, ordre 2)
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x_0 + h, y_0 + k) \in U$.

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) = & f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \\ & \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right) \\ & + o_0(h^2 + k^2). \end{aligned}$$

Il faut comprendre ce o_0 comme représentant une limite quand $(h, k) \to (0, 0)$.

Définition 12
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0, y_0) \in U$ fixé. La **matrice hessienne** de f au point (x_0, y_0) est la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

III.3 Étude des extrema

Théorème 6
Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit $X_0 \in U$ un point critique de f.

Notons également H la matrice hessienne de f au point X_0 et λ, μ ses valeurs propres réelles.

Cas $\lambda, \mu > 0$ **:** f atteint un minimum local en X_0.

Cas $\lambda, \mu < 0$ **:** f atteint un maximum local en X_0.

Cas λ, μ **de signes stricts opposés :** f n'a ni maximum local ni minimum local en X_0. On a un **point selle** ou **point col** en X_0.

Cas $\lambda\mu = 0$ **:** on ne peut pas conclure.

Remarquons que $\det(H) = \lambda\mu$ et $\operatorname{tr}(H) = \lambda + \mu$. Ainsi on pourra distinguer les 4 cas précédents sans connaître λ ni μ.