

Produit scalaire et espaces orthogonaux

Exercice 1

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère

$v = (0, 3, 1, -1)$ et $w = (1, 2, -1, 1)$. Soit $F = \text{Vect}(v, w)$

Déterminer une base orthonormale de $F^\perp$ puis une base orthonormale adaptée à $F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2

Soit $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$ un plan de l'espace et $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Donner les coordonnées du projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\mathcal{P}$ ainsi que celles de son symétrique orthogonal par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$ munit du produit scalaire canonique, on considère le plan $\mathcal{P} : 2x - y + z = 0$.

1. Construire $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ telle que (u, v) soit une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. On considère p et s , le projecteur orthogonal sur $\mathcal{P}$ et la réflexion de plan $\mathcal{P}$ respectivement. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de p et s .

Lexique : une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, c'est-à-dire par rapport à un plan dans $\mathbb{R}^3$.

3. En déduire une expression sous forme de produit matriciel des matrices canoniquement associées à s et p .

Exercice 4

Soit $\vec{p}$ un vecteur unitaire de $E = \mathbb{R}^3$. Soit

$$f : E \rightarrow E, \vec{u} \mapsto \vec{p} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{u}).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. Déterminer les éléments propres de f et interpréter géométriquement f .

Exercice 5

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n \in]0, +\infty[$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Montrer qu'alors $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$.

Matrices orthogonales

Exercice 6

Montrer que $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse (en effectuant le moins de calcul possible).

Exercice 7

Soient U un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$ et $A = I_n - 2UU^T$.

Montrer que A est orthogonale et déterminer la nature de l'endomorphisme canoniquement associé.

Exercice 8

Soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n$.

(on pourra écrire a_{ij} comme produit scalaire)

Exercice 9

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale O et une unique matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs tels que : $M = OT$

Matrices symétriques

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Trouver une matrice P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^T$.

Exercice 11

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $B = AA^T - A^T A$ ait toutes ses valeurs propres positives. Montrer que $B = 0$.

Exercice 12

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^3$. Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $A = P(B)$.

Exercice 13

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A^T A$ est diagonalisable.

On suppose pour le reste de l'exercice que A est inversible et que

$$A^T = A^{-1} + I_n.$$

2. En déduire que A est diagonalisable.
3. Déterminer un polynôme annulateur de A , c'est-à-dire un polynôme P tel que $P(A) = 0$.
4. On suppose que A n'est pas une homothétie. Déterminer le spectre de A .

Exercice 14

On considère $A \in S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $Sp(A) \subset [0, +\infty[$ ssi $\forall X \in \mathbb{R}^n \quad X^T A X \geq 0$.
2. Montrer que $Sp(A) \subset]0, +\infty[$ ssi $\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad X^T A X > 0$.
Dans ce cas, on dit que A est symétrique, définie, positive.
3. Montrer, pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que $M \in S_n(\mathbb{R})$ ssi M est diagonalisable et ses espaces propres sont orthogonaux deux à deux.
4. On suppose que A est symétrie, définie, positive.

Montrer qu'il existe une unique matrice B symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.