Table des matières

I Coniques

I.1 Définition monofocale

I.1.1 Définition

Soit F un point et $\mathcal{D}$ une droite qui ne passe pas par F. Soit également $e \in]0,+\infty[$. L'ensemble des points $\mathcal{C} = \{M|\ MF = ed(M,\mathcal{D})\}$ est appelé conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.

— si $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse.

— si $e = 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole.

— si $e > 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Dans toute cette première partie du cours, nous conserverons ces notations.

I.1.2 Définition (Repère focal)

On considère H le projeté orthogonal du foyer F sur la directrice $\mathcal{D}$. Le repère focal associé à la conique $\mathcal{C}$ est le repère orthonormé direct centré en F, dont la première direction est $\overrightarrow{HF}$. Le premier axe de ce repère est appelé axe focal. Il est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en H.

I.1.3 Équation cartésienne dans le repère focal

On cherche ici les points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$ (avec les notations précédentes), les coordonnées sont données dans le repère focal.

Notons M' le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Notons $h = \|\overrightarrow{HF}\| = d(F,\mathcal{D})$ et ainsi $H : \begin{pmatrix} -h \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} -h \\ y \end{pmatrix}$.

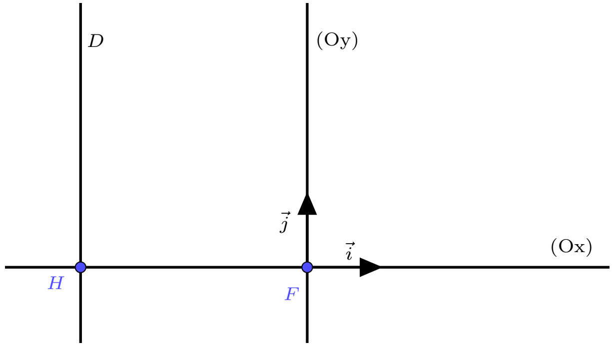


Figure 1 – Axe et repère focal

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \|\overrightarrow{MF}\| = ed(M,\mathcal{D}) \iff \|\overrightarrow{MF}\| = e\|\overrightarrow{MM'}\| \\ &\iff \|\overrightarrow{MF}\|^2 = e^2\|\overrightarrow{MM'}\|^2 \text{ car des normes sont positives} \\ &\iff x^2+y^2 = e^2((x+h)^2+0^2) \iff x^2+y^2 = e^2(x^2+2xh+h^2) \\ & x^2(1-e^2)+y^2-2e^2hx-e^2h^2 \end{aligned}$$

On note classiquement $p = eh$ que l'on appelle le *paramètre* de la conique $\mathcal{C}$ et avec cette notation on a obtenu

$$\mathcal{C} : x^2(1-e^2)+y^2-2epx-p^2 = 0$$

Notez que cette équation se réfère à des coordonnées dans le repère focal. Il faut la lire sous la forme : si un point M est de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère focal, alors $M \in \mathcal{C} \iff x^2(1-e^2)+y^2-2epx-p^2 = 0$.

I.1.4 Intersection avec l'axe focal

Soit $\mathcal{C}$ une conique d'axe $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e.

1. Si $\mathcal{C}$ est une parabole (ie. $e = 1$), alors il existe un unique point d'intersection entre l'axe focal et $\mathcal{C}$ appelé sommet de la parabole. Ce sommet est de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{\|HF\|}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{h}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère focal.
2. Si $\mathcal{C}$ n'est pas une parabole, alors il existe exactement deux points d'intersection entre l'axe focal et $\mathcal{C}$ appelés sommets de la conique.

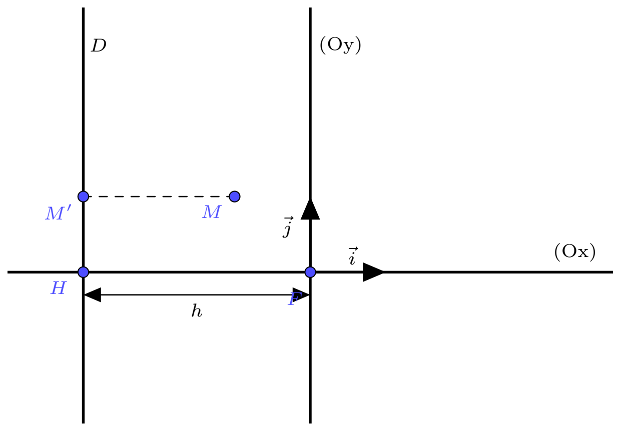


Figure 2 – Axe et repère focal

Preuve.
On cherche les point M à la fois sur l'axe focal et sur $\mathcal{C}$. Ainsi ils sont de coordonnées (toujours dans le repère focal) $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ et vérifient l'équation précédente

1. Cas $e = 1$. L'équation vérifiée devient $0 + 0^2 - 2px - p^2 = 1$ et la seule solution est $x = -\frac{p}{2} = -\frac{h}{2}$ car $p = eh = 1 \times h$.
2. Cas $e \neq 1$. L'équation devient cette fois $x^2(1-e^2) - 2epx - p^2 = 0$ qui est bien de degré 2 car $1 - e^2 \neq 1$ (rappelons ici que $e > 0$ et donc $e \neq -1$).
   Le discriminant est $4e^2p^2 + 4(1-e^2)p^2 = 4p^2 > 0$ et on obtient bien deux solutions distinctes (pour x, donc pour les points M correspondants également).

■

I.1.5 Milieu des sommets

Dans le cas $e \neq 1$ et avec les notations précédentes, le milieu des deux solutions est $-\frac{-2ep}{2(1-e^2)} = \frac{ep}{1-e^2}$ (avec les notations de 1ère, le milieu des deux racines réelles d'un trinôme est toujours $-\frac{b}{2a}$) et donc le milieu des sommets est de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{ep}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

I.1.6 Sommets

On peut retenir que les sommets d'une ellipse sont positionnés de part et d'autre du foyer, d'un même côté de la directrice. Les sommets d'une hyperbole sont positionnés de chaque côté de la directrice et du même côté du foyer.

I.2 Équations réduites

I.2.1 Théorème (Équation réduite d'une parabole)
Soit $\mathcal{C}$ une parabole. Notons S son unique sommet.

En notant $p = h = d(F, \mathcal{D})$, l'équation réduite de $\mathcal{C}$ s'obtient dans le repère centré en S et dont les vecteurs de bases sont les mêmes que pour le repère focal. Dans ce repère

$$\mathcal{C} : y^2 = 2px$$

Dans le repère au sommet, le foyer est de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Preuve.
Soit M un point du plan. On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère focal et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans le repère centré au sommet.

On a donc $\overrightarrow{FM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{SM} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$. Or $\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FS} + \overrightarrow{SM} = -\frac{h}{2}\vec{\imath} + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$.
Ainsi on obtient les relations (changement de repère par translation)

$$\begin{cases} x = -\frac{h}{2} + x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x + \frac{h}{2} \\ y' = y \end{cases}$$

Remarquons qu'on a bien $x' = 0 \iff x = -\frac{h}{2}$

De plus, $M \in \mathcal{C} \iff y^2 - 2px - p^2 = 0 \iff y^2 = 2p(x + \frac{h}{2}) \iff (y')^2 = 2px'$ qui est exactement le résultat annoncé. Attention, avec les notations de l'énoncé, x, y se réfèrent aux coordonnées dans le repère au sommet et non aux coordonnées dans le repère focal. ■

I.2.2 Tracé

Nous sommes maintenant en mesure de tracer une parabole de directrice et foyer donnés, en notant que son équation dans le repère au sommet est également $x = \frac{1}{2p}y^2$. L'astuce est ici de tourner votre feuille de $\frac{\pi}{2}$ (ce qui change les positions usuelles des axes) et tracer une parabole comme en seconde.

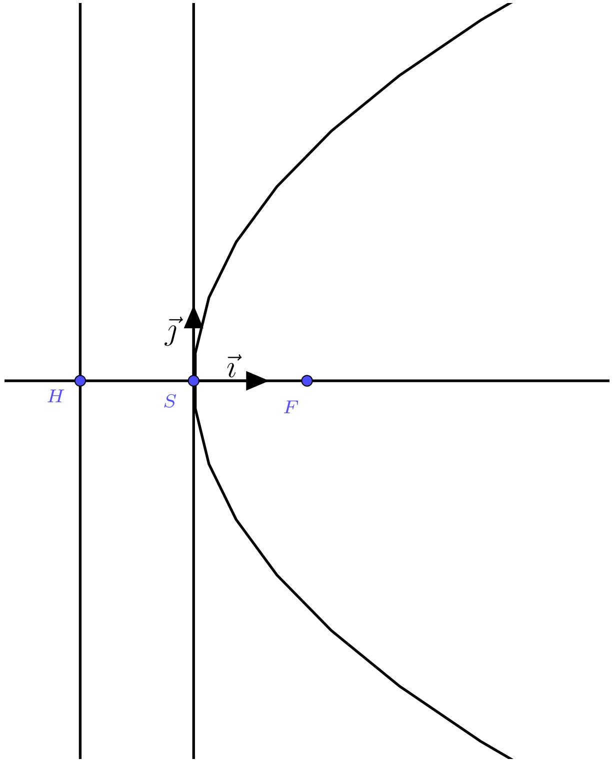


Figure 3 – Parabole, dans le repère au sommet

I.2.3 Théorème (Équation réduite d'une ellipse)
Soit $\mathcal{C}$ une ellipse (on a donc $e < 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est obtenue dans le repère centré en Ω et dont les vecteurs de bases sont les mêmes que le repère focal (on appelle repère central ce nouveau repère). Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs vérifiant $a > b$.

Preuve.
Commençons par poser M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère focal et de coordonnées $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère central. Alors, on a

$$\begin{cases} x = \frac{ep}{1-e^2} + x' \\ y = y' \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = x - \frac{ep}{1-e^2} \\ y' = y \end{cases}$$

On a maintenant

$$M \in \mathcal{C} \iff (1-e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0 \iff (1-e^2)\left(x^2 - \frac{2ep}{1-e^2}x\right) + y^2 = p^2$$
$$\iff (1-e^2)\left(\left(x - \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 - \frac{(ep)^2}{(1-e^2)^2}\right) + y^2 = p^2 \text{ mise sous forme canoniqu}$$
$$\iff (1-e^2)(x')^2 - \frac{e^2p^2}{1-e^2} + y^2 = p^2 \iff (1-e^2)(x')^2 + y^2 = p^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

Remarquons maintenant que $1 - e^2 > 0$ car $0 < e < 1$ et il suffit maintenant de diviser l'équation obtenue par $p^2 + \frac{e^2p^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2} > 0$ pour obtenir une équation sous la forme voulue.

On a alors $a = \frac{p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} < a$ car $1-e^2 \in]0,1[$ et donc $\sqrt{1-e^2} > 1-e^2$. ■

I.2.4 Théorème (Équation réduite d'une hyperbole)
Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole (on a donc $e > 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est également obtenue dans le repère central. Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs.

Preuve.
Elle est tout à fait similaire à la preuve précédente, excepté que cette fois $1-e^2 < 0$.

On trouve $a = \frac{p}{e^2-1}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$ et les positions relatives de a et b sont données par les positions relatives de e et $\sqrt{2}$. ■

I.2.5 Sommets

Encore une fois, les sommets sont de coordonnées $\begin{pmatrix}\pm a\\0\end{pmatrix}$.

I.2.6 Proposition
Une ellipse et une hyperbole sont des courbes symétriques par rapport à :

1. chacun des axes du repère central
2. leur centre

Preuve.
Dans le repère central, le symétrique d'un point $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ par rapport à Ω est de coordonnées $\begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$.

De plus, en revenant à l'équation réduite de C (la conique étudiée ici : une ellipse ou une hyperbole), on constant immédiatement que

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in C \iff \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}\in C$$

ce qui prouve que C est bien symétrique par rapport à Ω.

On prouve de même les symétries par rapport aux axes. ∎

I.2.7 Conséquence

Le point F', symétrique de F par rapport à Ω est également un foyer de C associé à la directrice $\mathcal{D}'$ (la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à Ω).

Pour ce couple de foyer/directrice, la convention pour le repère focal est de prendre $\vec{\imath} = -\frac{\overrightarrow{HF'}}{\|\overrightarrow{HF'}\|}$.

I.3 Tracé des coniques

I.3.1 Proposition (Paramétrisations des coniques)
Considérons l'ellipse $E : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ et l'hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1. E est le support de la courbe paramétrée $f_E : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & \begin{pmatrix}a\cos t\\ b\sin t\end{pmatrix}\end{array}\right.$.
2. La demi hyperbole $H_+ = H\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geqslant 0\}$ est le support de la courbe $f_H : \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2\\ t & \mapsto & \begin{pmatrix}a\,\mathrm{ch}\,t\\ b\,\mathrm{sh}\,t\end{pmatrix}\end{array}\right.$

D'après la proposition I.2.6, l'autre demi-hyperbole s'obtient par symétrie par rapport à (Oy).

Preuve.
Il s'agit de paramétrer ces courbes implicites.

Soit $M=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

1. $M\in E$ ssi $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{b}\right)^2=1$ ssi il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{a}=\cos t$ et $\frac{y}{b}=\sin t$ ssi M est un point du support de f_E.
2. Montrons d'abord un résultat intermédiaire.

   Soient $\alpha\in\mathbb{R}^+$ et $\beta\in\mathbb{R}$ tels que $\alpha^2-\beta^2=1$. Comme sh : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est strictement croissante elle est injective. De plus, $\lim_{-\infty}\mathrm{sh}=-\infty$ et $\lim_{+\infty}\mathrm{sh}=+\infty$ et que sh est continue, $\mathrm{sh}(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et donc sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

   Ainsi on peut poser $t\in\mathbb{R}$ tel que $\beta=\mathrm{sh}(t)$. Alors $\alpha^2=1+\beta^2=1+\mathrm{sh}^2(t)=\mathrm{ch}^2(t)$. Comme $\alpha\geqslant 0$ et $\mathrm{ch}(t)\geqslant 0$, on a $\alpha=\mathrm{ch}(t)$.

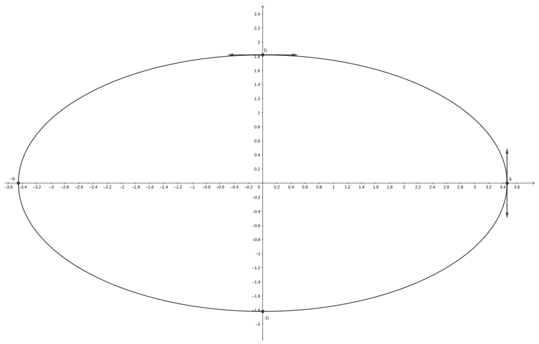
   Il suffit maintenant d'appliquer ce résultat pour obtenir un raisonnement similaire au point 1). ∎

I.3.2 Tracé de l'ellipse

On connaît déjà des symétries de l'ellipse, que l'on peut retrouver par étude de la courbe paramétrée. Dressons les tableaux pour f_E paramétrant notre ellipse. Aucune étude n'est nécessaire, car les fonctions sont des fonctions usuelles.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	
$x(t)$	a	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	b
$y'(t)$		$+$	0

Nous sommes maintenant en mesure de tracer l'ellipse.



I.3.3 Tracé de l'hyperbole

Les variations ne présentent pas de difficultés particulières.

t	0		$+\infty$
$x'(t)$	0	$+$	
$x(t)$	a	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	

On remarque, comme prévu une tangente verticale en $t = 0$ (dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha > 0 \end{pmatrix}$).

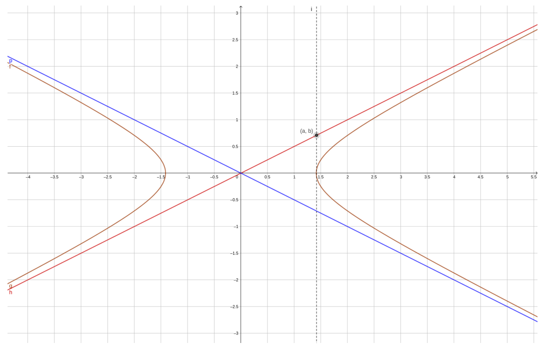
Étudions la branche infinie en $+\infty$.

— On a deux limites infinies. ce qui élimine les asymptotes verticale et horizontale

— $\frac{y(t)}{x(t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{be^t}{ae^t} = \frac{b}{a} \in \mathbb{R}^*$. on est dans le cas 2c

— Pour $t \geqslant 0$, $y(t) - \frac{b}{a}x(t) = \cdots = -2be^{-t} \underset{+\infty}{\to} 0$.

On en déduit que l'hyperbole admet la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ comme asymptote oblique.



I.4 Études des courbes implicites

I.4.1 Définition

On dit qu'une courbe C du plan est définie par une équation implicite si elle est donnée par une équation de la forme

$$C : f(x, y) = 0$$

pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas les points de C sont les points M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui vérifient $f(x,y)=0$.

I.4.2 Exemple
Les ellipses et hyperboles que nous venons d'étudier sont des courbes définies par une équation implicite.

On ne peut pas isoler x ou y de ces équations, contrairement aux équations réduites de paraboles par exemple, ou aux courbes représentatives de fonctions usuelles.

I.4.3 Théorème
Soit C une courbe du plan définie par une équation implicite $C : f(x,y)=0$ où la fonction f est $\mathcal{C}^1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C.

1. On dit que M_0 est un point régulier de C ssi $\overrightarrow{grad}\, f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$.
2. Si M_0 est un point régulier de C, alors la tangente à C au point M_0 est la droite passant par M_0 et normale à $\overrightarrow{grad}\, f(x_0,y_0)$.

Preuve.
Dans le cas où $\overrightarrow{grad}\, f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$, on admet qu'il existe un paramétrage de la courbe C (au moins au voisinage de M_0) de classe $\mathcal{C}^1$.

On note $\varphi : t \mapsto (u(t),v(t))$ ce paramétrage et I l'intervalle de définition de φ.

Alors $\forall t \in I \;\; f(u(t),v(t))=0$. Par composition, $f \circ \varphi$ est dérivable sur I et en dérivant :

$$u'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + v'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)) = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \perp \varphi'(t_0)$ et $\varphi'(t_0)$ dirige la tangente en M_0.

Remarque : l'existence du paramétrage utilisé ici est équivalent au fait que f est localement bijective autour de M_0. On peut faire le lien avec les fonctions numériques : lorsque $f'(x_0) \neq 0$, f est bijective autour de x_0 (et sa réciproque est dérivable, voir le cours de sup). ■

I.4.4 Proposition (Tangentes à une ellipse)
On considère une ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (les coordonnées sont donc données dans le repère central).

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$. Alors la tangente à E en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Preuve.
Posons $f : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ de telle sorte que $C : f(x,y)=0$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune de ses deux variables et on trouve $\overrightarrow{grad}\, f(x_0,y_0) = (\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2})$.

Comme $M_0 \neq (0,0)$ (car le centre n'est pas sur l'ellipse), M_0 est un point régulier et on connaît un vecteur normal à la tangente cherchée. Notons T_0 cette tangente.

On a maintenant, pour $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} M \in T_0 &\iff \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{grad}\, f(x_0,y_0) \\ &\iff (x-x_0)\frac{2x_0}{a^2} + (y-y_0)\frac{2y_0}{b^2} = 0 \text{ par calcul du produit scalaire} \\ &\iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - (\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}) = 0 \text{ en divisant par 2} \\ &\iff \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \text{ car } M_0 \in C \end{aligned}$$

■

I.4.5 Tangentes particulières

Aux points de coordonnées $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$ les tangentes sont verticales et aux points de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b \end{pmatrix}$ elles sont horizontales.

I.4.6 Proposition (Tangentes à une hyperbole)
On considère une hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in H$. Alors la tangente à H en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Preuve.
Tout à fait similaire. ■

I.4.7 Tangentes aux sommets

Les tangentes aux sommets d'une hyperbole (de coordonnées $\begin{pmatrix} \pm a \\ 0 \end{pmatrix}$) sont verticales également.

II Équation de coniques, réduction

Changement de repère, rappel

On se place dans $\mathbb{R}^2$ (par exemple) et on considère une base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ Ainsi que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ (dont les colonnes sont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si ces vecteurs étaient notés sous forme de colonne).

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les coordonnées de X dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Alors $X = PX'$ et $X' = P^{-1}X$

II.1 Équation de conique

II.1.1 Définition

Une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite de type conique si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M : (x, y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

II.1.2 Exemple

Les cercles sont des cas particuliers de coniques.

II.1.3 Définition

Soient $a, b, p > 0$. On rappelle que les équations réduites des coniques sont de la forme :

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
- $y^2 = 2px$ (parabole)

L'axe focal est, dans chaque cas :

- (Ox) si $a > b$ et (Oy) si $a < b$. Le cas $a = b$ est en fait le cas du cercle qui n'est pas une conique (un cercle n'a pas d'excentricité).
- (Ox)
- (Ox)

II.1.4 Tracé

Rappelons les tracés obtenus dans l'épisode précédent.

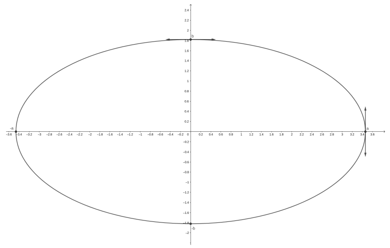


FIGURE 4 – Ellipse dans le repère central, cas $a > b$

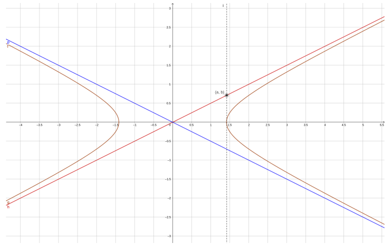


FIGURE 5 – hyperbole dans le repère central

II.2 Réduction d'une conique

II.2.1 Écriture matricielle

Fixons les coefficients d'une équation de type conique.

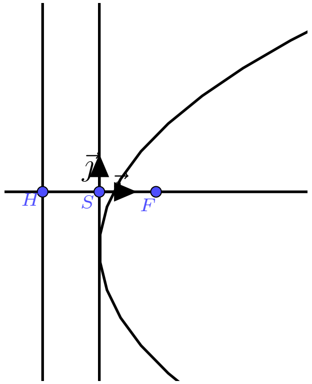


FIGURE 6 – Parabole, dans le repère au sommet

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$. Alors $X^T AX = ax^2 + bxy + cy^2$. Ainsi en posant en plus $L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$, on obtient :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \iff X^T AX + LX + f = 0$$

Le but est maintenant de diagonaliser A, ce qui fait disparaître le terme “rectangle” en xy.

D'après le théorème spectral, on peut toujours trouver une base orthonormée directe dans laquelle l'équation n'a plus de terme en xy.

II.2.2 Après rotation

Comme A est symétrique réelle, on peut la diagonaliser dans une base orthonormée directe. Notons λ, μ ses valeurs propres. On suppose $\lambda \neq \mu$ (sinon, A était déjà diagonale, les homothétie ne changent pas de matrice par changement de base). Notons P la matrice de passage (qui diagonalise A).

Posons $X' = P^{-1}X = P^T X$ ie $X = PX'$, les coordonnées de X dans la nouvelle base.

$X^T AX + LX + f = 0 \iff (PX')^T APX' + LPX' + f = 0 \iff {}^T X'DX' + (LP)X' + f = 0 \iff \lambda x'^2 + \mu y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$ où $LP = \begin{pmatrix} d' & e' \end{pmatrix}$.

1. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, on obtient (mise sous forme canonique) soit une parabole soit une réunion de droites.
2. Si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, on passe sous forme canonique (pour x et y, attention à bien factoriser par λ et μ) pour obtenir soit une équation d'ellipse soit une équation d'hyperbole (au moins pour le membre de gauche), après changement de repère par translation (la mise sous forme canonique donne les coordonnées du centre, comme pour les cercles).
   Suivant la valeur de la constante, on peut obtenir un seul point, l'ensemble vide ou deux droites sécantes.

II.2.3 Proposition
Soit $C : ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$ une courbe du plan.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

— Le signe des valeurs propres de A détermine le type de la conique : deux valeurs propres de même signe strict pour une ellipse, une valeur propre nulle pour une parabole.

— Pour obtenir une équation réduite, commencer par diagonaliser A dans une base orthonormée directe (ce qui traduit un changement de repère par rotation) puis effectuer un changement de repère par translation après mise sous forme canonique.

II.2.4 Exemple
Tracer les coniques $3x^2 + 4xy + 3y^2 = \pm 1$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ on a $X^T AX = 3x^2 + 4xy + 3y^2$.

De plus, A est symétrique réelle donc est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses espaces propres sont orthogonaux. Or pour $x \in \mathbb{R}$

$$\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - 6x + 5$$

Ainsi les valeurs propres de A sont 1 et 5.

Après calcul, $E_1(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et comme les espaces propres de A sont orthogonaux, $E_5(A) = \operatorname{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Considérons la base orthonormée directe de vecteur propres de A, $\mathcal{B} = (u, v) = (\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. On pose $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ tel que $X = PX'$, c'est-à-dire que X' est la colonne des coordonnées de X dans la base $\mathcal{B}$.

En notant $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

On a alors $X^T AX = X^T PDP^T X = (X')^T DX' = (x')^2 + 5(y')^2$.

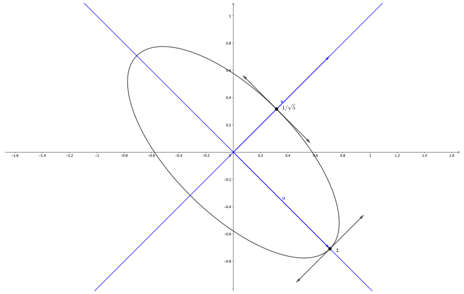


FIGURE 7 – Ellipse d'équation $3x^2 + 4xy + 3y^2 = 1$

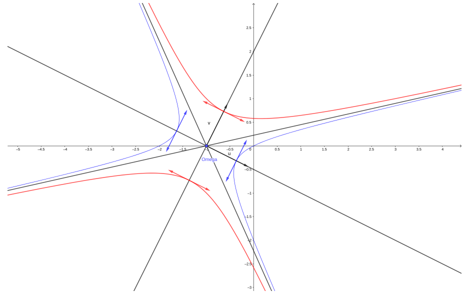


FIGURE 8 – Cas $\alpha = 0$ en bleu, $\alpha = -3$ en rouge

Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, u, v)$, l'équation étudiée devient $(x')^2 + 5(y')^2 = \pm 1$. Il y a deux cas

- L'équation $(x')^2 + 5(y')^2 = -1$ n'a pas de solution réelle, donc l'ensemble étudié est vide.
- L'ensemble des solutions de $(x')^2 + 5(y')^2 = 1$ est une ellipse que nous allons tracer. On commence par tracer le nouveau repère, dont on a donné des vecteurs directeurs des axes, puis on trace l'ellipse dans ce nouveau repère. Avec les notations des équations réduites de ce cours, on a $a = 1$ et $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

II.2.5 Exemple

Tracer $x^2 - 4xy - 2y^2 + 2x - 4y = \alpha$ suivant les valeurs de α.

Posons la matrice est $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. $\det(A) < 0$, on obtient une conique de type hyperbole (deux racines de signe stricts opposés). Les valeurs propres sont les racines de $X^2 + X - 6$ qui sont 2 et -3.

$E_2 = \text{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_{-3} = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. On pose $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\vec{u}, \vec{v})$. L'équation dans le nouveau repère devient

$$2x'^2 - 3y'^2 + 2(\frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}) - 4\frac{-x' + 2y'}{\sqrt{5}} = \alpha$$

c'est à dire

$$2x'^2 - 3y'^2 + \frac{8}{\sqrt{5}}x' - \frac{6}{\sqrt{5}}y' = \alpha \iff 2(x' + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 - \frac{8}{5} - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{3}{5} = \alpha$$
$$\iff 2(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}})^2 - 3(y' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 = \alpha + 1$$

On pose Ω de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ dans le nouveau repère (ce qui donne $P\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans le repère canonique) et (u, v) les deux colonnes de la matrices P dans l'ordre. Alors dans le repère $\mathcal{R}'' = (\Omega, u, v)$ (on note x'', y'' les coordonnées) l'équation devient

$$2(x'')^2 - 3(y'')^2 = \alpha + 1$$

- Cas $\alpha = -1$: l'équation devient $y'' = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}x''$. La conique est en fait une réunion de deux droites.
- Cas $\alpha > -1$: l'équation devient $\left(\sqrt{\frac{2}{\alpha+1}}\right)^2 (x'')^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{\alpha+1}}\right)^2 (y'')^2 = 1$ et on obtient une équation réduite d'hyperbole dont les asymptotes sont d'équations $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ obtenu comme valeur de $\frac{b}{a}$, les $\sqrt{\alpha+1}$ se simplifient
- Cas $\alpha < -1$: cette fois l'équation devient $\left(\sqrt{\frac{3}{-\alpha-1}}\right)^2 (y'')^2 - \left(\sqrt{\frac{2}{-\alpha-1}}\right)^2 (x'')^2 = 1$. L'équation n'est pas réduite, mais il suffit d'échanger le rôle des axes pour tracer.

On obtient une hyperbole ou la réunion de deux droites suivant la valeur de α.

II.2.6 Gradient

Prenons une équation de conique $C : f(x, y) = 0$.

Si C est une ellipse ou une hyperbole, alors f possède un unique point critique situé au centre de symétrie. On le voit facilement sur les équations réduites.

Index