Table des matières

I Coniques

I.1 Définition monofocale

Définition 1
Soit F un point et $\mathcal{D}$ une droite qui ne passe pas par F. Soit également $e \in]0, +\infty[$. L'ensemble des points $\mathcal{C} = \{M | \ MF = ed(M, \mathcal{D})\}$ est appelé coniquede foyer$F$, de directrice$\mathcal{D}$ et d'excentricité e.

— si $e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une ellipse.item si $e = 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une parabole.item si $e > 1$ on dit que $\mathcal{C}$ est une hyperbole.

Dans toute cette première partie du cours, nous conserverons ces notations.

Définition 2 (Repère focal)
On considère H le projeté orthogonal du foyer F sur la directrice $\mathcal{D}$. Le repère focal associé à la conique $\mathcal{C}$ est le repère orthonormé direct centré en F, dont la première direction est $\overrightarrow{HF}$. Le premier axe de ce repère est appelé axe focal. Il est perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en H.

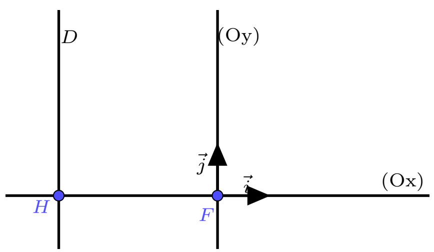

Figure 1 – Axe et repère focal

I.2 Équations réduites

Théorème 1 (Équation réduite d'une parabole)
Soit $\mathcal{C}$ une parabole. Notons S son unique sommet.

En notant $p = h = d(F, \mathcal{D})$, l'équation réduite de $\mathcal{C}$ s'obtient dans le repère centré en S et dont les vecteurs de bases sont les mêmes que pour le repère focal. Dans ce repère

$$\mathcal{C} : y^2 = 2px$$

Dans le repère au sommet, le foyer est de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{p}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et la directrice d'équation $x = -\frac{p}{2}$.

Théorème 2 (Équation réduite d'une ellipse)
Soit $\mathcal{C}$ une ellipse (on a donc $e < 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est obtenue dans le repère centré en Ω et dont les vecteurs de bases sont les mêmes que le repère focal (on appelle repère central ce nouveau repère). Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs vérifiant $a > b$.

Théorème 3 (Équation réduite d'une hyperbole)
Soit $\mathcal{C}$ une hyperbole (on a donc $e > 1$). Notons Ω le milieu de ses deux sommets.

L'équation réduite de $\mathcal{C}$ est également obtenue dans le repère central. Cette équation est de la forme

$$\mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a, b sont deux réels strictement positifs.

Proposition 1
Une ellipse et une hyperbole sont des courbes symétriques par rapport à :

1. chacun des axes du repère central
2. leur centre

I.3 Tracé des coniques

Proposition 2 (Paramétrisations des coniques)
Considérons l'ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et l'hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

1. E est le support de la courbe paramétrée $f_E : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \end{cases}$.

2. La demi hyperbole $H_+ = H \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geqslant 0\}$ est le support de la courbe $f_H : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} a \operatorname{ch} t \\ b \operatorname{sh} t \end{pmatrix} \end{cases}$

D'après la proposition 1, l'autre demi-hyperbole s'obtient par symétrie par rapport à (Oy).

I.4 Études des courbes implicites

Définition 3
On dit qu'une courbe C du plan est définie par une équation implicite si elle est donnée par une équation de la forme

$$C : f(x,y) = 0$$

pour une certaine fonction f de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas les points de C sont les points M du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui vérifient $f(x,y) = 0$.

Théorème 4
Soit C une courbe du plan définie par une équation implicite $C : f(x,y) = 0$ où la fonction f est $\mathcal{C}^1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point de C.

1. On dit que M_0 est un point régulier de C ssi $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$.
2. Si M_0 est un point régulier de C, alors la tangente à C au point M_0 est la droite passant par M_0 et normale à $\overrightarrow{grad}\, f(x_0, y_0)$.

Proposition 3 (Tangentes à une ellipse)
On considère une ellipse $E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (les coordonnées sont donc données dans le repère central).

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in E$. Alors la tangente à E en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Proposition 4 (Tangentes à une hyperbole)
On considère une hyperbole $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in H$. Alors la tangente à H en M_0 est la droite d'équation

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

II Équation de coniques, réduction

II.1 Équation de conique

Définition 4
Une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ est dite de type conique si $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M : (x,y)$ vérifiant une équation de la forme

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ et $d, e, f \in \mathbb{R}$.

Définition 5
Soient $a, b, p > 0$. On rappelle que les équations réduites des coniques sont de la forme :
— $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse)
— $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (hyperbole)
— $y^2 = 2px$ (parabole)

L'axe focal est, dans chaque cas :
— (Ox) si $a > b$ et (Oy) si $a < b$. Le cas $a = b$ est en fait le cas du cercle qui n'est pas une conique (un cercle n'a pas d'excentricité).
— (Ox)
— (Ox)

II.2 Réduction d'une conique

Proposition 5
Soit $C : ax^2 + bxy + cx^2 + dx + ey + f = 0$ une courbe du plan.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
— Le signe des valeurs propres de A détermine le type de la conique : deux valeurs propres de même signe strict pour une ellipse, une valeur propre nulle pour une parabole.
— Pour obtenir une équation réduite, commencer par diagonaliser A dans une base orthonormée directe (ce qui traduit un changement de repère par rotation) puis effectuer un changement de repère par translation après mise sous forme canonique.