Entrainement

Exercice 1
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, en précisant s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé, d'une partie bornée (ou rien de tout ça !).

Représenter ces domaines de définitions avec la convention de tracer en traits pleins les frontières incluses et en pointillés les frontières exclues.

$f_1 : (x,y) \mapsto \ln(xy)$ $\quad f_2 : (x,y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ $\quad f_3 : (x,y) \mapsto \arcsin(|x+y|)$

Exercice 2
On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \cos(x-y) \end{cases}$. Donner une équation du plan tangent à la surface représentative de f au point de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 0, f(\frac{\pi}{2}, 0))$.

Exercice 3
Soit $f, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $F : (x,y) \mapsto f(x+\varphi(y))$. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert à déterminer et établir l'égalité

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

EDP

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \end{cases}$

Exercice 5
Soit $c > 0$

Donner les fonction $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

en effectuant le changement de variables $u = x + ct$ et $v = x - ct$ et en posant $g : (u,v) \mapsto f(x,t) = f(\dots)$

On pourra calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$

Exercice 6
Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$.

On dit que f est harmonique ssi $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. (son laplacien est nul).

1. Montrer que si f est harmonique alors $g_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $g_2 = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $g_3 : (x,y) \mapsto x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont harmoniques.
2. Dans cette question, $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
   On suppose que f peut s'écrire sous la forme$f(x,y) = \varphi(x^2+y^2)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.
   Montrer que la fonction f est harmonique ssi φ vérifie une équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis résoudre cette équation différentielle.

Exercice 7
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ invariante par translation, c'est à dire qui vérifient

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \ f(x+t, y+t) = f(x,y)$$

1. On suppose dans cette question que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie l'hypothèse précédente.
   (a) Montrer que f vérifie l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Indication : on pourra fixer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) On effectue le changement de variable $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x-y$. Trouver une équation aux dérivées partielles simple vérifiée par g, puis déterminer g et enfin f.
2. Conclure.

Extrema

Exercice 8
Soit $f : (x,y) \mapsto y^2 - x^2y + x^2$ définie sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

1. On note Γ la frontière de D. Représenter D et Γ graphiquement.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Trouver le maximum et le minimum de f. Pour étudier f sur Γ, on introduira deux fonctions d'une variable.

Exercice 9
Déterminer les extrema locaux de $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto x\ln\left(x^2\right) + y^2$.

Exercice 10
1. Montrer que $(E) : e^{-x} = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, que l'on notera x_0.
2. En déduire que $f : (x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ admet un unique extremum, dont on donnera la nature, atteint en un unique point dont on exprimera les coordonnées à l'aide de x_0.