Table des matières

I Espace préhilbertien, espace euclidien **1**
I.1 Produit scalaire . . . 1
I.2 Théorèmes . . . 2
I.3 Projections et symétries orthogonales . . . 3

II Isométries **5**
II.1 Cas général . . . 5
II.2 Groupe orthogonal en dimension 2 . . . 6
II.3 Groupe orthogonal en dimension 3 . . . 7

Dans tout le chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des $\mathbb{R}$-ev.

I Espace préhilbertien, espace euclidien

I.1 Produit scalaire

I.1.1 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array} \right.$ (**à valeurs réelles**) qui a les propriétés suivantes :

1. Symétrique : $\forall u, v \in E \ \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.
2. Bilinéaire :

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall u, v, w \in E \ \varphi(\lambda u + \mu v, w) = \lambda \varphi(u,w) + \mu \varphi(v,w)$$

$$\text{et } \varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi(u,v) + \mu \varphi(u,w).$$

3. Positive : $\varphi(u,u) \geqslant 0$.
4. Définie : $\varphi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0$

Un produit scalaire est donc une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.

Notation. Quand φ est un produit scalaire, on note plutôt $(u|v), \langle u, v \rangle$, ou $u \cdot v$ à la place de $\varphi(u,v)$

Explication Cette définition du produit scalaire nous permet de nous passer de la notion d'angle et de distance (ou norme). Ce sont exactement les propriétés du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ déjà étudié dans le chapitre 9.

I.1.2 Définition

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel munit d'un produit scalaire. On dit alors que E est un espace préhilbertien réel, et si E est de dimension finie on dit que E est un espace euclidien.

I.1.3 Remarque

1. La bilinéarité implique que $(0_E|u) = (u|0_E) = 0$ pour tout $u \in E$.
2. Pour vérifier qu'une application est bilinéaire, on vérifie une seule linéarité. La symétrie prouve automatiquement la deuxième linéarité.

I.1.4 Exemple

Il faut connaître ces exemples, ainsi que savoir les prouver.

1. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: rappelons que pour deux colonnes $X, Y \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi(X,Y) = X^T Y = \langle X, Y \rangle$ est bien un produit scalaire au sens de ce chapitre.
2. Cette fois $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
   On pose $\varphi : (A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A^T B)$ (remarquer que $A^T B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$). Montrons que φ est un produit scalaire. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\varphi(B,A) = \mathrm{tr}(B^T A) = \mathrm{tr}\left((A^T B)^T\right) = \varphi(A,B)$, car la trace est invariante par transposition.
   La linéarité à droite est immédiate par composition de deux applications linéaires.
   Calculons $\varphi(A,A)$. On note $A = (a_{i,j})_{i,j \in [\![1,n]\!]}$. Alors $\mathrm{tr}(A^T A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i} a_{k,i}$ est la somme des carrés de tous les coefficients de A. Ainsi $\varphi(A,A) \geqslant 0$ et on a même $\varphi(A,A) = 0$ ssi tous les termes de la somme sont nuls (somme de réels positifs) ie $A = 0$.
3. Montrons que $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_a^b fg \end{array} \right.$ est bien un produit scalaire.
   La symétrie provient de la commutativité du produit dans $\mathbb{R}^{[a,b]}$. La linéarité à gauche est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale.
   Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Alors $\varphi(f,f) = \int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale.
   De plus si $\varphi(f,f) = 0$ alors $\int_a^b f^2 = 0$ et donc f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle : elle est nulle sur le segment $[a,b]$. Ainsi $f^2 = 0$ et donc $f = 0$.
4. On se place dans $E = \mathbb{R}[X]$ et pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on pose

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

   Montrons que φ est un produit scalaire. Symétrie, bilinéarité, positivité : voir l'exemple précédent.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0$. Montrons que P est le polynôme nul. Pour l'instant on sait que la fonction polynomiale associée est nulle sur le segment $[0,1]$. Ainsi P possède une infinité de racines et est donc le polynôme nul.

I.1.5 Remarque

On peut le plus souvent définir plusieurs produits scalaires sur un même espace. Par exemple, $\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right)\mapsto xx'+2yy'$ est un autre produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

I.2 Théorèmes

I.2.1 Théorème
Toutes les définitions et propriétés portant sur les produits scalaires et les normes vues dans le chapitre 9sur le théorème spectral sont encore valables dans un espace euclidien E (c'est-à-dire un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie dans lequel on a défini un produit scalaire) ou dans un espace préhilbertien (la même chose, mais en dimension infinie, par exemple $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ avec le produit scalaire intégral).

La seule condition est de remplacer la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par une base orthonormée de E.

En particulier on pourra utiliser :

- norme d'un vecteur, elle est nulle ssi le vecteur est le vecteur nul.
- lien norme-produit scalaire (définition de la norme, identité de polarisation)
- inégalité de Cauchy-Schwartz et triangulaire.
- orthogonalité de vecteurs, liberté d'une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2 et non nuls. Théorème de Pythagore
- base orthonormée et calcul des coordonnées dans une telle base
- procédé de Gram-Schmidt pour créer une base orthogonale ou orthonormale à partir d'une base existante
- espaces orthogonaux et orthogonal d'un sous-espace (avec une généralisation, voir la proposition I.2.7)

Preuve.
Seules les 4 propriétés définissant un produit scalaire ont été utilisées pour prouver tous ces résultats. ■

I.2.2 Théorème (Rappel : coordonnées dans une base orthonormée)
Soit E un espace euclidien et $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base **orthonormée** de E.

Soit $x,y\in E$ et notons $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}, Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)=\begin{pmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ leurs colonnes de coordonnées dans $\mathcal{B}$

1. $\forall k\in[\![1,n]\!]\ x_k=\langle x,e_k\rangle$ ou encore $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\langle x,e_k\rangle e_k$.
2. $\langle x,y\rangle=\sum\limits_{k=1}^{n}x_ky_k=X^TY$.

I.2.3 Exemple
Soit E un espace euclidien de dimension 2, et $\mathcal{B}=(e_1,e_2)$ une base orthonormale. Montrer que $\mathcal{B}'=(u_1,u_2)$ avec $u_1=\frac{4e_1+3e_2}{5}$ et $u_2=\frac{-3e_1+4e_2}{5}$ est une BON de E.

Que dire de la matrice de passage ?

I.2.4 Exemple (Gram-Schmidt)
On munit $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)\mathrm{d}t$. Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit échelonnée en degré.

Posons $(P_0,P_1,P_2)=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On cherche une base orthogonale notée (Q_0,Q_1,Q_2) par le procédé de Gram-Schmidt.

1. On pose $Q_0=P_0=1$.
2. On cherche Q_1 sous la forme $Q_1=P_1-\alpha Q_0$ (donc de degré 1) tel que $Q_0\perp Q_1$.

   Alors $\langle Q_1,Q_0\rangle=0\iff\langle P_1,Q_0\rangle-\alpha\langle Q_0,Q_0\rangle=0\iff\displaystyle\int_{-1}^{1}t\times1\mathrm{d}t-\alpha\int_{-1}^{1}1\times1\mathrm{d}t=0$.

   On trouve $\alpha=0$ et donc $Q_1=P_1=X$.
3. On cherche Q_2 sous la forme $Q_2=P_2-aQ_0-bQ_1$ (donc de degré 2) tel que $Q_2\perp\mathrm{Vect}(Q_0,Q_1)$.

   $\langle Q_2,Q_0\rangle=0\iff\langle P_2,Q_0\rangle-a\langle Q_0,Q_0\rangle-0=0\iff\displaystyle\int_{-1}^{1}t^2\times1\mathrm{d}t-2a=0\iff\frac{2}{3}-2a=0$ et donc $a=\frac{1}{3}$.

   $\langle Q_2,Q_1\rangle=0\iff\langle P_2,Q_1\rangle-b\langle Q_1,Q_1\rangle=0\iff0-b\times\frac{2}{3}=0\iff b=0$.

   Finalement, $Q_2=X^2-\frac{1}{3}$.

Pour trouver une base orthonormée, il suffit maintenant de diviser par les normes (déjà calculées, sauf pour Q_2).

$$\|Q_2\|^2 = \langle Q_2, Q_2\rangle = \int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3})^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{45}$$

et donc

I.2.5 Remarque

1. Tout espace euclidien admet une BON.
2. Le procédé de Gram-Schmidt ne change pas une famille orthogonale (sauf à la normaliser si on veut obtenir une BON).

I.2.6 Remarque

Si on orthonormalise $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, la condition de conservation des espaces vectoriels croissants assure que $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ (la matrice de passage) est triangulaire supérieure.

I.2.7 Proposition (Orthogonal d'un sous espace)
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de E.
Si F est de dimension finie, alors $F \oplus F^\perp = E$.

Preuve.

— $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, car le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

— Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F que l'on suppose orthonormale (on a appliqué le procédé de Gram-Schmidt).
Soit $x \in E$.

— Analyse. Supposons que $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$.
Alors, pour $k \in [\![1, r]\!]$, $\langle x, e_k\rangle = \langle x_1, e_k\rangle + 0_{\mathbb{R}}$. Comme de plus $x_1 = \sum_{k=1}^{r} \langle x_1, e_k\rangle e_k$ (expression des coordonnées par le produit scalaire, dans une base orthonormée), on a

$$x_1 = \sum_{k=1}^{r} \langle x, e_k\rangle \text{ et } x_2 = x - x_1$$

— Synthèse. Posons $x_1 = \sum_{k=1}^{r} \langle x, e_k\rangle e_k$ et $x_2 = x - x_1$.
Alors clairement, $x = x_1 + x_2$ et $x_1 \in F$. Il reste à montrer que $x_2 \in F^\perp$ c'est-à-dire $x_2 \perp F$. Nous allons montrer que $x_2 \perp e_i$ pour tout i.

$$\begin{aligned}
\langle x_2, e_i\rangle &= \langle x, e_i\rangle - \langle x_1, e_i\rangle = \langle x, e_i\rangle - \sum_{k=1}^{r} \langle\langle x, e_k\rangle e_k, e_i\rangle \\
&= \langle x, e_i\rangle - \sum_{k=1}^{r} \langle x, e_k\rangle\langle e_k, e_i\rangle \text{ encore une linéarité} \\
&= \langle x, e_i\rangle - \langle x, e_i\rangle \text{ tous les autres termes de la somme sont nuls} \\
&= 0
\end{aligned}$$

et on a bien $x_2 \in F^\perp$.

Finalement, $F \oplus F^\perp = E$ ■

I.2.8 Exemple

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux. Rappelons qu'ils sont également supplémentaires, et donc $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.

En effet, si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $B \in A_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{tr}(A^T B) = \mathrm{tr}(B^T A) = -\mathrm{tr}(BA) = -\mathrm{tr}(BA^T) = -\mathrm{tr}(A^T B) = 0$ où on a utilisé dans l'ordre : la symétrie du produit scalaire, la définition de matrice anti-symétrique ainsi que la linéarité de la trace, la définition de matrice symétrique, puis finalement la symétrie du produit scalaire.

I.3 Projections et symétries orthogonales

I.3.1 Définition

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E.

1. La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à (de direction) $F^\perp$.
2. La symétrie orthogonale sur F est la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.

I.3.2 Remarque

1. On a bien $E = F \oplus F^\perp$...
2. On pourra se souvenir de la formule $s = 2p - Id$ pour lier les deux objets précédents.
3. Pour $x \in E$, on a les deux conditions géométriques $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

I.3.3 Exemple
Matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} : 2x - y = 0$.

I.3.4 Proposition
Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace de dimension finie de E dont une BON est $(u_1, \ldots, u_r)$. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Alors

$$\forall x \in E \; p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|u_i)u_i$$

En particulier, si $F = \mathrm{Vect}(u)$ est une **droite**, $p_F(x) = (x|u)u$ où u est **de norme 1**.

Preuve.
Il s'agit d'un re-formulation de la preuve de I.2.7 ∎

I.3.5 Méthode

1. On détermine $p_F(x)$ en remarquant que

$$p_F(x) \in F$$
$$x - p_F(x) \perp F$$

donc $x - p_F(x)$ est orthogonal à une base de F.

2. On utilise la formule $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|f_i)f_i$ si on connaît une BON de F.

I.3.6 Définition
Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est appelée retournement et une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelé réflexion.

I.3.7 Réduction

Matrice, trace, det dans des bases adaptées.

I.3.8 Exemple
Dans $\mathbb{R}^3$ on pose : $F = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix})$. Calculer les matrices dans la base canonique de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonales par rapport à F.

I.3.9 Proposition (Inégalité de Bessel)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F.

$$\forall x \in E \; \|p_F(x)\| \leqslant \|x\|$$

Preuve.
Soit $x \in E$. On a $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et donc d'après le théorème de Pythagore, $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2$. On conclut en remarquant qu'un carré de réel est toujours positif et que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. ∎

I.3.10 Exercice
Montrer que cette propriété caractérise les projecteurs orthogonaux parmi les projecteurs. Plus précisément, si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur de E on a

$$\forall x \in E \; \|p(x)\| \leqslant \|x\| \iff p \text{ est un projecteur orthogonal}$$

Indication : on pourra poser un vecteur non nul x du noyau de p et considérer la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(x)$.

I.3.11 Théorème (Moindres carrés)
Soit F un sous-espace de dimension finie de E.
Pour $x \in E$, on note $d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$ la distance de x à F.
Il existe un unique $x_0 \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, x_0) = \|x - x_0\|$ et donc la borne inférieure est en fait un minimum.
x_0 est le projeté orthogonal de x sur F.

Preuve.
Notons $x_0 = p_F(x)$ le projeté orthogonal de x sur F. Alors $x_0 \in F$ et donc $d(x, F) \leqslant d(x, x_0)$.
De plus, si $y \in F$ alors $x - y = x - x_0 + x_0 - y$ et donc $\|x - y\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - y\|^2$, car $\underbrace{x - x_0}_{\in F^\perp} \perp x_0 - y$ et d'après le théorème de Pythagore.
Ainsi pour tout $y \in F$ $d(x, y) \geqslant d(x, x_0)$ et donc $d(x, F) = d(x, x_0)$. Le calcul précédent montre que ce minimum n'est atteint qu'en x_0. ∎

I.3.12 Remarques

1. Ce théorème donne avant tout l'existence d'un minimum.
2. Avec les notations de la preuve, $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$ (toujours d'après Pythagore). Ainsi, on a un moyen pratique de calculer la valeur de ce minimum : il s'agit de calculer une projection orthogonale.

I.3.13 Traduction dans une BON

Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une BON de F

1. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i$.
2. $d(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)^2$.

I.3.14 Exemple

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2 \mathrm{d}t$. Il s'agit de calculer, dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ munit du produit scalaire intégral, le projeté de l'exponentielle sur le sous espace des fonctions affines (qui est de dimension 2).

II Isométries

Le cadre ici est celui des espaces euclidiens, et plus particulièrement des espaces euclidiens de petite dimension. E sera donc toujours un espace euclidien et on abusera sans retenue du théorème I.2.2 de calcul des coordonnées dans une base orthonormée.

II.1 Cas général

II.1.1 Définition-Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire. On a équivalence entre

1. f conserve le produit scalaire ie $\forall x, y\ (f(x)|f(y)) = (x|y)$
2. f conserve la norme, ie $\forall x \in E\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Dans ce cas, f est bijective et est appelé automorphisme orthogonal ou encore isométrie vectorielle.

L'ensemble est automorphismes orthogonaux de E est noté $O(E)$.

Preuve.

— $1 \Rightarrow 2$ C'est évident. On pourrait prouver que si f n'est pas forcément linéaire, mais conserve le produit scalaire, alors elle est linéaire.

— $2 \Rightarrow 1$ On a pour tous $x, y \in E$

$$\begin{aligned}(f(x)|f(x)) &= \frac{1}{2}(\|\underbrace{f(x)+f(y)}_{=f(x+y)}\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2)\\ &= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - |y\|^2) = (x|y)\end{aligned}$$

Comme f conserve la norme, on a $f(x) = 0 \iff \|f(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0$ donc f est injective donc bijective, car E est de dimension finie. ■

II.1.2 Exemple

1. L'identité est clairement dans $O(E)$.
2. Toute symétrie orthogonale est dans $O(E)$. Le vérifier en revenant à la définition $s(x) = x_F - x_G$ avec $x_F \perp x_G$.
3. Les projections sur tout sous-espace strict ne sont pas des automorphismes (noyau non trivial).

II.1.3 Corollaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E.

$$f \in O(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$$

Preuve.

Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Soit $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors le théorème I.2.2 montre que

$$\underbrace{\|x\|}_{\text{norme dans E}} = \underbrace{\|X\|}_{\text{norme dans } \mathbb{R}^n} \quad \text{et } \|MX\| = \|f(x)\|$$

$\mathrm{Mat}_B(f(x)) = MX = \mathrm{Mat}_B(f) \times \mathrm{Mat}_B(x)$

Comme l'application $\begin{cases} E & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_B(x) \end{cases}$ est bijective on a bien $f \in O(E)$ ssi $M \in O_n(\mathbb{R})$ (voir la caractérisation numéro 6 dans le chapitre 9). ■

Explication À condition de se placer dans une BON, on peut passer des endomorphismes orthogonaux aux matrices orthogonales.

II.1.4 Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in O(E)$
2. L'image de toute BON de E par f est une BON de E.
3. L'image d'une certaine BON de E par f est encore une BON de E.

Preuve.
Simple traduction de la même propriété sur les matrices orthogonales ■

II.1.5 Exemple
Montrer que l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \end{pmatrix}$ est orthogonale.

II.1.6 Proposition
La composition de deux isométries est encore une isométrie et l'inverse (bijection réciproque) d'une isométrie est encore une isométrie.

Preuve.
Idem ■

II.1.7 Exercice
Dans E euclidien, soit F un sous-espace et $f \in O(E)$. Montrer que $f(F)^\perp = f(F^\perp)$. (inclusion facile + dimension qui est conservée par les iso)

II.1.8 Proposition
Soit $f \in O(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par f (ie $f(F) \subset F$) alors $F^\perp$ est stable par f.

Preuve.
Supposons que F est stable par f et soit $x \in F^\perp$. On doit montrer que $f(x) \in F^\perp$.

Soit donc $y \in F$. Montrons que $(f(x)|y) = 0$. Or $(f(x)|y) = (x|f^{-1}(y))$. De plus, f est bijective donc $f(F) = F$ (égalité des dimensions). Ainsi $f^{-1}(y) \in F$ et donc $(x|f^{-1}(y)) = 0$.

Finalement, $f(x) \in F^\perp$. ■

II.1.9 Proposition
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

$$M \text{ est symétrique et } M \in O_n(\mathbb{R}) \iff f \text{ est une symétrie orthogonale}$$

Preuve.
Si M est symétrique on a à la fois $M^T = M$ et $M^T = M^{-1}$. Ainsi f est une symétrie. Montrons que $\ker(f - Id_E) \perp \ker(f + Id_E)$.

Soient $x_1, x_2 \in E\backslash\{0_E\}$ tels que $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = -x_2$ (des vecteurs propres). Montrons que $x_1 \perp x_2$. Or f est une isométrie, donc $(x_1|x_2) = (f(x_1)|f(x_2)) = (x_1|-x_2) = -(x_1|x_2)$ et donc $(x_1|x_2) = 0$. Finalement la symétrie f est bien orthogonale.

On peut aussi, encore une fois, utiliser le théorème I.2.2 pour voir que $\langle x, y\rangle = X^TY$ en utilisant les coordonnées dans $\mathcal{B}$ et les espaces propres de M sont orthogonaux d'après le théorème spectral...

Réciproquement, supposons que f est une symétrie orthogonale. Alors $M = M^{-1}$. De plus, M est une matrice orthogonale, car f est une isométrie et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. ■

II.2 Groupe orthogonal en dimension 2

On se place dans $\mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{B}_{can} = (e_1, e_2)$ la base canonique. On peut également se placer dans un espace euclidien E de dimension 2 munit d'une base orthonormée de référence qui joue alors le rôle de la base canonique.

II.2.1 Proposition (Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$)
Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$.

1. $M \in SO_2(\mathbb{R})$ ssi il existe θ tel que $M = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (M est canoniquement associée à la rotation d'angle θ).
   Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ commutent entre elles.
2. $\det M = -1$ ssi M est de la forme $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ (M est canoniquement associée à une réflexion, ie. une symétrie orthogonale par rapport à une droite).

Preuve.

— On commence par remarquer que toutes les matrices R_θ sont clairement dans $SO_2(\mathbb{R})$.

Réciproquement, soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbb{R})$. Alors $\begin{cases} a^2+b^2 & = 1 \\ c^2+d^2 & = 1 \\ ad-bc & = 1 \end{cases}$

On peut donc écrire, d'après les deux première équations $a = \cos\varphi, b = \sin\varphi$ et $c = \cos\psi, d = \sin\psi$. Maintenant la condition sur le déterminant est

$$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = 1 \text{ ie. } \cos(\varphi+\psi) = 1$$

On en déduit que $\varphi + \psi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\sin\psi = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ et $\cos\psi = \cos\varphi$. CQFD.

— On peut faire la même démonstration avec $\det M = -1$ et trouver le résultat annoncé. ■

II.2.2 Exemple

On note $\mathcal{D} : -\sin(\varphi)x + \cos(\varphi)y = 0$. Calculer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe $\mathcal{D}$.

II.2.3 Corollaire

Soit E un espace euclidien de dimension 2.

Soit $f \in O(E)$ une isométrie de ce plan. Alors

— f est une rotation ssi $\det(f) = 1$.

— f est une réflexion (une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan, c'est-à-dire une symétrie axiale) ssi $\det(f) = -1$.

Dans le cas d'une rotation, il suffit de déterminer l'image d'un vecteur de base pour en déduire l'angle. Pour une réflexion, on cherche la droite de point fixe pour la caractériser géométriquement.

II.2.4 Exemple

Calculer $R_\theta S_\varphi$. On pourra d'abord remarquer que c'est une matrice d'isométrie négative.

II.2.5 Composition de deux réflexions

La composée de deux réflexion est une rotation du plan. Il reste à déterminer l'angle.

II.2.6 Valeurs propres

1. Les matrices de rotations $R_\theta \neq \pm I_2$ ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$. Leurs valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$.
2. Les réflexions sont diagonalisables, de valeurs propres 1 et -1 (multiplicité 1).

II.3 Groupe orthogonal en dimension 3

On se place maintenant dans E espace euclidien de dimension 3, et on choisit $\mathcal{B}$ une base orthonormée qui oriente E (on choisit par convention que $\mathcal{B}$ est directe et c'est elle qui est la référence pour savoir si une autre base est directe).

Lorsque $E = \mathbb{R}^3$, la base de référence est la base canonique

II.3.1 Proposition

Soit $f \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien.

Si f possède une valeur propre λ réelle, alors $\lambda = \pm 1$.

Preuve.

Soit $x \neq 0_E$ un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f.

Alors $\|f(x)\| = \|x\|$ car f est une isométrie. On a donc $\|\lambda x\| = \|x\|$ ou encore $|\lambda|\|x\| = \|x\|$ Ainsi $|\lambda| = 1$ car x est non nul donc de norme non nulle.

Plus généralement, soit M la matrice dans une base orthonormée de f et $\lambda \in Sp(M)$ réelle ou non. Soit également un vecteur $X \in \mathbb{K}^n$ propre de M associé à λ.

Alors $\bar{X}$ est un vecteur propre associé à $\bar{\lambda}$ (car M est à coefficients réels) et on a $(A\bar{X})^T AX = \bar{\lambda}\bar{X}^T\lambda X = |\lambda|^2\bar{X}^T X$.

Si on note $X = \begin{pmatrix} z_1 \\ \\ z_n \end{pmatrix}$ alors $\bar{X}^T X = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 > 0$.

De plus, comme A est orthogonale, $(A\bar{X})^T AX = \bar{X}^T A^T AX = \bar{X}^T X$. Ainsi $\|\lambda^2\| = 1$ et λ est de module 1. ■

II.3.2 Proposition

On note $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une base orthonormée directe de E

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour un $\theta \in [-\pi, \pi]$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

La matrice de f ne dépend pas du choix de v, w tant que (u, v, w) est une base orthonormée directe.

Preuve.
Il faut prouver qu'en changeant de base orthonormée directe, on conserve la même matrice.

Soit $\mathcal{B}' = (u, v', w')$ une base orthonormée directe de E et $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors $P \in SO_3(\mathbb{R})$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

car les colonnes doivent former une base orthonormée directe : ceci impose les 0 dans la première ligne pour l'orthogonalité à la première colonne et la troisième colonne est calculée par produit vectoriel.

Alors, $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in So_2(\mathbb{R})$ (les colonnes de P sont de norme 1) et donc on peut poser $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\varphi \end{pmatrix}$ en notation par bloc.

Alors $P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {R_\varphi}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{-\varphi} \end{pmatrix}$.

Un calcul direct (et un peu de trigonométrie) montre alors que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \underbrace{=}_{\text{changement de base}} P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P \underbrace{=}_{\text{calcul}} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

■

II.3.3 Définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. S'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ soit de la forme précédente, alors on dit que f est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ orienté par u et d'angle θ.

II.3.4 Interprétation géométrique

L'interprétation géométrique est la suivante : $\mathrm{Vect}(u)$ est la droite des points fixes, et dans $P = \mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$, f est la rotation d'angle θ. On dit alors que f est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ orienté par u et d'angle θ.

On dit que l'axe de f est orienté par u, car l'angle de rotation dans l'espace dépend de la direction selon laquelle on observe le plan P. Le sens de u donne le "dessus" de P et donc le côté par lequel on observe P pour que l'angle soit bien θ. Si on change le sens de u (qui devient donc $-u$), alors l'angle de la même rotation devient $-\theta$.

II.3.5 Exemple

Déterminer, dans $\mathbb{R}^3$ dont la base canonique est notée $\mathcal{B}_c = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ les matrices dans $\mathcal{B}_c$ des rotations :

1. r_1 d'axe orienté par $\vec{\imath}$ et d'angle θ,
2. r_2 d'axe orienté par $\vec{\jmath}$ et d'angle θ,
3. r_3 d'axe orienté par $\vec{k}$ et d'angle θ

La première matrice est directement la matrice de la définition précédente.
Pour la seconde, on pose $\mathcal{B}_2 = (\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath})$ une autre BOND. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(r_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ donc } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$$

où on a simplement utilisé la définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}(r_2)$.

On trouve en posant $\mathcal{B}_3 = (\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_3}(r_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ donc } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II.3.6 Étude des valeurs propres

Soit $f \in O(E)$. Comme 3 est impair, χ_f possède une racine réelle qui vaut forcément ± 1. Notons u un vecteur propre associé à $\lambda = \pm 1$.

Alors $P = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ est stable par f et $f_{|P}$ est une isométrie d'un plan vectoriel. Ainsi $f_{|P}$ est une rotation ou une réflexion.

1. Si $f_{|P}$ est une réflexion, alors f est une symétrie orthogonale. Quitte à changer l'ordre d'une base de vecteur propre, sa matrice réduite est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f est un retournement, c'est le cas $\lambda = -1$) ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f est une réflexion, c'est le cas $\lambda = 1$
2. Dans le cas où $f_{|P}$ est une rotation il y a plusieurs possibilités :
   — Cas $\lambda = 1$. Dans ce cas on choisit (v, w) une BOND de P de telle sorte que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une BOND de l'espace et alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et f est une rotation
   — Cas $\lambda = -1$. f est la composée (commutative) d'une rotation et d'une réflexion. L'axe de rotation est $\mathrm{Vect}(u)$ et le plan de réflexion est P.

On construit $\mathcal{B} = (u, v, w)$ une BOND comme au point précédent et alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et le produit commute bien.

II.3.7 Théorème (Les types d'isométries)
Soit $f \in O(E)$ avec E un espace euclidien de dimension 3.

1. Si $\det f = 1$ alors f est une rotation de l'espace (ou un retournement qui est une rotation d'angle π).
2. Si $\det f = -1$, alors f est soit une réflexion, soit la composée d'une réflexion et d'une rotation (l'axe de rotation étant orthogonal au plan de réflexion).

II.3.8 Proposition (Etude d'une matrice orthogonale)
Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$. On suppose $M \neq \pm I_3$.

On note f l'endomorphisme canoniquement associé (ou plus généralement, une isométrie dont M est la matrice dans une BOND)

1. Si M est symétrique, alors f est une symétrie orthogonale. Si $\mathrm{tr}(M) = 1$ il s'agit d'une réflexion (symétrie par rapport à un plan), si $\mathrm{tr}(M) = -1$ il s'agit d'une symétrie axiale (retournement).
2. Sinon il y a deux cas.
   (a) Si $\det(M) = 1$, alors f est une rotation.
   (b) Si $\det(M) = -1$ alors $-M$ est une matrice de rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ orienté par u et d'angle θ. Alors f est au choix :
   — la composée de la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(u)^{\perp}$ et de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle $\theta + \pi$.
   — la composée commutative de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(u)$ et d'angle θ et de la symétrie centrale de centre O

II.3.9 Exemple

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. M est symétrique donc il s'agit d'une matrice de symétrie orthogonale. Comme $\mathrm{tr}(M) = -1$, il s'agit d'une symétrie axiale.

On détermine l'axe comme ensemble des points fixes, ie comme noyau de $M - I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. Clairement $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $(M - I_3)X = 0$ donc M est la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

II.3.10 Déterminer une rotation

Soit M une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$.

1. Etape 1 : déterminer l'axe. Il s'agit de l'ensemble des points fixes, ou encore de l'espace propre associé à la valeur propre 1. On fixe u de norme 1 directeur de l'axe.
2. Etape 2 : déterminer l'angle. On le note $\theta \in]-\pi, \pi]$.
   On a déjà, $\mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos(\theta)$ donc on connaît $\cos(\theta)$ facilement. Il reste à trouver le signe de θ, ie le signe de $\sin(\theta)$.
   Fixons v, w tels que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ soit une BOND. Alors
   $$\det_{\mathcal{B}}(u, v, Mv) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta.$$
   Si maintenant $X \in \mathbb{R}^3$ n'est pas sur l'axe de rotation, on écrit $X = au + X_P$ où X_P est non nul et orthogonal à u. Alors, dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}' = (u, \frac{X_P}{\|X_P\|}, u \wedge \frac{X_P}{\|X_P\|})$, $\det_{\mathcal{B}'}(u, X, MX) = \det(u, X_P, MX_P) = \|X_P\|^2 \sin(\theta)$, car $Mu = u$ et par opération élémentaire sur les colonnes.

II.3.11 Proposition
Soit $M \in SO_3(\mathbb{R})$ alors M est la matrice d'une rotation d'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ (orienté par u) et d'angle θ vérifiant :

1. D est le noyau de $M - I_3$. On note $D = \mathrm{Vect}(u)$ où u est unitaire.
2. Pour X un vecteur $X \notin D$, θ vérifie $\begin{cases} \mathrm{tr}(M) = 1 + 2\cos\theta \\ sg(\sin(\theta)) = sg([u, X, MX]) \end{cases}$ où le déterminant est calculé dans une BOND, de préférence dans la base canonique.

En règle générale, on prend pour X un vecteur de la base canonique.

II.3.12 Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que M est une matrice de rotation dont on précisera un axe dirigé et l'angle correspondant.

On a facilement $\det(M) = 1$ par deux échanges de colonnes. Clairement les colonnes de M forment une BON (qui est donc directe car $\det(M) > 0$).

L'ensemble des points fixes est $E_1(M) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on pose $u = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire qui dirige et oriente l'axe de rotation. L'angle $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \text{tr}(M) = 0$ donc $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$. Ainsi $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. De plus, en posant $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui n'est pas sur l'axe de rotation, $\sin(\theta)$ est du signe de $[u, v, Mv] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ par développement suivant la 3ème ligne. Finalement $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Index

Bilinéaire, 1

Caractérisation de $O_2(\mathbb{R})$, 6

Définie, 1

Inégalité de bessel, 4
Isométrie, 5

Moindres carrés, 4

Positive, 1
Produit scalaire, 1

Réflexion, 4
Retournement, 4

Symétrique, 1