

Coniques

Exercice 1

Soient $a, b \in]0, +\infty[$ avec $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$. On considère la courbe d'équation (implicite)

$$\mathcal{C}_\alpha : \frac{x^2}{a^2 - \alpha} + \frac{y^2}{b^2 - \alpha} = 1$$

Donner en fonction de α une description de $\mathcal{C}_\alpha$.

Exercice 2

On considère une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et directrice $\mathcal{D}$. On se place dans le repère où l'équation est réduite.

1. Tracer $\mathcal{P}$, F et $\mathcal{D}$ dans ce repère, en rappelant l'équation réduite.
2. Soit M un point d'ordonnée $t \in \mathbb{R}$ de $\mathcal{P}$. Donner une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M .
3. On pose H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Montrer que la médiatrice de $[FH]$ est également la tangente à $\mathcal{P}$ en M .
4. On considère le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{t}{p} \end{pmatrix}$. Montrer que ce vecteur est normal à $\mathcal{P}$ en M (c'est-à-dire normal à la tangente en ce point).

On note $\vec{i}$ le premier vecteur de base de notre repère. Montrer que $(\widehat{\vec{i}, \vec{n}}) = (\widehat{\vec{n}, \overrightarrow{MF}})$.

Exercice 3

On considère deux points distincts A, B du plan et I le milieu de $[AB]$.

On considère également $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$MI^2 = MA \times MB$$

1. Proposer un repère adapté à la mise en équation.
2. Tracer $\mathcal{C}$

Exercice 4

On considère deux points distincts F_1, F_2 du plan et $a > 0$.

On considère également $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan tels que

$$MF_1 + MF_2 = 2a$$

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ si $2a < F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. On suppose que $2a > F_1F_2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse dont les foyers sont F_1 et F_2 .

Exercice 5

Soit $e > 1$ et $\mathcal{C}$ une hyperbole d'excentricité e , de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.

1. Retrouver l'équation dans le repère focal puis l'équation réduite.
2. On note $p = e \times d(F, \mathcal{D})$. Retrouver l'équation réduite de $\mathcal{C}$ puis exprimer a, b en fonction de e et p .
3. Montrer que les asymptotes de $\mathcal{C}$ sont perpendiculaires ssi $e = \sqrt{2}$.

Réduction d'équation

Exercice 6

Donner la nature et tous les axes de symétrie des coniques d'équation

1. $x^2 + y^2 - 3x - y + 1 = 0$
2. $2x^2 - y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$
3. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y = 0$
4. $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$

Exercice 7

Tracer dans le repère canonique les coniques :

$$x^2 + 8xy - 5y^2 + 21 = 0$$

$$x^2 + 8xy - 5y^2 - 21 = 0$$

$$9x^3 + 4xy + 6y^2 + \alpha = 0$$

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 10x - 55y + 50 = 0$$

avec $\alpha = -20, 0$ puis 20 .

Exercice 8

On se place dans le plan munit d'un repère orthonormé et on pose $P \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme de degré 3 unitaire (de coefficient dominant égal à 1).

Montrer que l'ensemble d'équation $P(x) = P(y)$ est la réunion d'une droite et d'une conique bornée.