Produit scalaire

Exercice 1

1. Montrer que l'application $\varphi : (P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $n = 2$, construire une base orthonormale à partir de la base $(1, X, X^2)$.

Exercice 2

On considère $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ non nuls. Montrer que $\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.
2. Montrer que $\varphi : (P,Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
3. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que $\langle X^p, X^q\rangle = (p+q)!$

Exercice 3

Soit $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice symétrique réelle d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Montrer que $\sum\limits_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Indication : considérer le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice 4

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ converge.
2. On définit alors
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X]\times\mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
Montrer que φ est un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall x \in \mathbb{R}\ T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$
Indication : que vaut $\cos((n+1)x) - \cos((n-1)x)$?
4. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
5. Montrer que $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$ et $\forall n \neq 0\ \|T_n\| = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Projection et symétrie orthogonale

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de dimension n rapporté à une base orthonormée $\mathcal{B}$, et $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de E.

1. Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ relativement à la base $\mathcal{B}$, est UU^T, où U est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{u}$ relativement à $\mathcal{B}$.
2. En déduire la matrice de la projection orthogonale sur le plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$ de l'espace euclidien usuel $\mathbb{R}^3$ rapporté à sa base canonique.

Exercice 6

En reprenant les résultats de l'exercice 2, déterminer
$$m = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t}\mathrm{d}t$$

Exercice 7

On se place dans $E = \mathbb{R}^3$ munit de son produit scalaire canonique. et on considère la plan $\mathcal{P}$ et la courbe $\mathbb{C}$ définis par
$$\mathcal{P} : x - 2y + 2z = 0,\ C : \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = 0 \end{cases},\ t \in [-\pi, \pi]$$

1. Reconnaître C.
2. Donner un vecteur w normal à $\mathcal{P}$.
3. Montrer que $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$ et donner une base orthonormée (u, v) de $\mathcal{P}$ dont le premier vecteur est positivement proportionnel à u_1 et telle que (w, u, v) est une base orthonormée directe de l'espace.
4. En notant $M(t)$ le point de paramètre t de $\mathcal{C}$, donner $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ les coordonnées du projeté orthogonal de $M(t)$ sur $\mathcal{P}$ dans la base (u, v).
5. Montrer que les coordonnées $\alpha(t), \beta(t)$ vérifient $(\alpha(t) + \beta(t))^2 + \left(\frac{\alpha(t)-2\beta(t)}{2}\right)^2 = 1$.
6. En déduire la nature de la projection de $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{P}$ ainsi qu'un tracé dans le repère où l'équation est réduite.

Isométries

Exercice 8
Donner les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de :

1. chaque réflexion par rapport à un plan de coordonnées ((xOy), (xOz), (yOz)).
2. chaque rotation d'angle θ autour de l'axe orienté par un vecteur de la base canonique.

Exercice 9

1. Question préliminaire : Soit r une rotation du plan et s une réflexion su plan. Quelles est la nature de $r \circ s$?
2. On considère r la rotation du plan d'angle θ. Rappeler l'écriture complexe de r sous la forme $f_r : z \mapsto ....$
   Il s'agit ici d'écrire la fonction $f_r : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui a un complexe z qui est l'affixe de $M \in \mathbb{R}^2$ associe l'affixe de $r(M)$.
3. Soit s la réflexion canoniquement associée à $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ pour un $\varphi \in]0, \pi[$.
   Montrer que l'écriture complexe de s est $f_s : z \mapsto e^{i\varphi}\overline{z}$.
4. Trouver les complexes d'affixe 1 qui sont les points fixes de f_s et en déduire l'axe de s.
5. Interpréter géométriquement $r \circ s$ et $s \circ r$.

Exercice 10
Décrire les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ euclidien donnés par :

1. $f_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$.
2. $f_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$
3. $f_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix}$
4. $f_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x-z}{\sqrt{2}} \\ y \\ \frac{x+z}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Exercice 11
Décrire les endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ euclidien de matrices dans la base canonique :

a) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$