Table des matières

I Représentation des surfaces

I.1 Surface paramétrée

Définition 1
On appelle nappe paramétrée ou surface paramétrée une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geqslant 1)$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Une telle fonction f sera notée $f : (u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$.

Le support d'une surface paramétrée est l'ensemble $S = \{M(u, v) |\ (u, v) \in U\} = f(U)$.

On a alors $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in S \iff \exists (u, v) \in U \ \begin{cases} x_0 = x(u, v) \\ y_0 = y(u, v) \\ z_0 = z(u, v) \end{cases}$

Définition 2
Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée et $(u_0, v_0) \in U$.

Au point $M_0 = M(u_0, v_0)$ on peut définir deux courbes paramétrées de l'espace appelées courbes coordonnées de f en M_0 :
— $\Gamma_1 : u \mapsto f(u, v_0)$.
— $\Gamma_2 : v \mapsto f(u_0, v)$.

Définition 3
Soit $f : (u, v) \mapsto \overrightarrow{OM}(u, v)$ une surface paramétrée définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. On note S son support. Soit $(u_0, v_0) \in U$ et $M_0 = M(u_0, v_0)$.

1. On dit M_0 est un point **regulier** de S (ou de f) ssi $\left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$ est libre c'est à dire ssi $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \operatorname{Vect} OM}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.
Sinon on dit que M_0 est un point singulier ou stationnaire.
2. Si M_0 est régulier, on appelle plan tangent à S en M_0 le plan
$$M_0 + \operatorname{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)).$$

Définition 4
On considère $M_0 = M(u_0, v_0)$ un point régulier dune nappe paramétrée. La droite normale à cette nappe en M_0 est la droite passant par M_0 et perpendiculaire au plan tangent en M_0 (elle est dirigée par un vecteur normal à ce plan).

I.2 Surface définie par une équation cartésienne

Définition 5
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On appelle surface d'équation (implicite) $f(x, y, z) = 0$ l'ensemble $\Sigma = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ f(x, y, z) = 0\}$ (l'ensemble des solutions de l'équation).

Un point $M \in \Sigma$ est dit **régulier** ssi $\overrightarrow{grad}\, f(M) \neq \vec{0}$ et singulier sinon.

Théorème 1 (Plan tangent)
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit Σ la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ et $M_0 \in \Sigma$ un point régulier.

Alors le plan tangent à Σ en M_0 est le plan passant par M_0 et normal à $\overrightarrow{grad}\, f(M_0)$ ie le plan d'équation
$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

Bilan des représentations : on se donne un point $M : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

- Dire que M est un point d'une surface d'équation donnée, c'est dire que les coordonnées de M vérifient cette équation.
- Dire que M est un point d'une nappe paramétrée, c'est dire qu'on peut exprimer les coordonnées de M en fonctions de deux réels (notés u et v plus haut).

I.3 Courbes tracées sur des surfaces

Proposition 1
Soit Γ une courbe paramétrée tracée sur une surface Σ.

Si M_0 est un point de Γ régulier pour la courbe paramétrée Γ et régulier pour la surface Σ (il y a deux définitions possibles, suivant la description de Σ), alors la tangente à Γ en M_0 est contenue dans le plan tangente à Σ en M_0.

II Exemples de surfaces et de courbes

II.1 Surfaces réglées

Définition 6
Une surface S est dite **réglée** ssi elle peut être écrite comme la réunion d'une famille de droites.

Plus précisément, S est réglée ssi il existe une surface paramétrée dont le support est S de la forme $M(k,t) = A(t) + k\vec{u}(t)$ où $A, \vec{u}$ sont de classe $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^3)$ et $\vec{u}$ ne s'annule pas. M est alors définie sur $I \times \mathbb{R}$.

Pour un t fixé, la droite $\mathcal{D}_t = A(t) + \mathrm{Vect}(\vec{u}(t))$ est une **génératrice** de S et on a $S = \bigcup_{t \in I} \mathcal{D}_t$

Proposition 2
Soit S une surface réglée. En un point régulier M_0, le plan tangent contient la génératrice passant par M_0.

II.2 Surface de révolution

Définition 7
On appelle surface de révolution la surface S obtenue par rotation d'une courbe Γ autour d'une droite Δ. Plus précisément, il s'agit de la réunion de toutes les images de Γ par les rotations d'axe Δ et d'angle quelconque.

- Δ est l'axe de S.
- Les intersections de S avec les plans orthogonaux à Δ sont soit vide, soit un point, soit des cercles d'axe Δ que l'on appelle parallèles de S.
- Un plan méridien de S est un plan qui contient Δ.
- Une méridienne de S est l'intersection de S avec un demi-plan méridien, délimité par Δ.

Proposition 3
Une surface S est de révolution autour de Δ ssi pour tout plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à Δ, $S \cap \mathcal{P}$ est soit vide, soit un point, soit un cercle dont le centre est sur Δ.

II.3 Intersection de surfaces

Définition 8
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f, g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

On appelle courbe d'équation cartésienne $\Gamma : \begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ l'intersection des des surfaces ainsi définies (cette intersection peut être une surface, un ou des points, vide...).

Un point $M_0 \in \Gamma$ est dit régulier si et seulement si $\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M_0) \neq \vec{0}$

Théorème 2
Avec les notations de la définition précédente, si $M_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ est un point régulier de Γ alors la tangente à Γ en M_0 est la droite $M_0 + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{grad}\, f(M_0) \wedge \overrightarrow{grad}\, g(M_0))$