Révisions sur les équations différentielles

Équations d'ordre 1

Définition 1
On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre une équation de la forme

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t) \qquad (E)$$

avec a, b des fonctions définies sur un intervalle I. L'équation homogène associée à E est

$$\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0 \qquad (E_H)$$

On appelle solution de (E) toute **fonction** dérivable $y : I \to \mathbb{K}$ telle que $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. Les courbes représentatives des fonctions solutions sont appelées *courbes intégrales*de l'équation.

Le problème consistant trouver une solution de (E) vérifiant en plus une condition (appelée condition initiale) du type $y(t_0) = \alpha$ (où $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) est appelé un problème de Cauchy

Théorème 1 (Résolution de l'équation homogène)
Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ une fonction continue sur l'intervalle I et A une **primitive** de a sur I.

Les solutions de (E_H) $\forall t \in I \ y'(t) + a(t)y(t) = 0$ sont exactement les fonctions y de la forme $\forall t \in I \ y(t) = \lambda e^{-A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ est quelconque.

Ainsi, à chaque scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ correspond exactement une fonction solution y et on remarque que toutes les fonctions solutions sont proportionnelles.

Théorème 2 (Cauchy)
Soient $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Étant donné $t_0 \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution (sur I) y de l'équation différentielle (E) qui vérifie $y(t_0) = \alpha$.

Proposition 1 (Structure de l'ensemble des solutions)
On considère l'équation différentielle (E). Notons A une primitive de a sur l'intervalle I et $y_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & e^{-A(t)} \end{array} \right.$ une solution de l'équation homogène associée. Alors l'ensemble des solutions de (E) est la droite affine $y_p + \mathrm{Vect}(y_0)$ où y_p est l'une des solutions de E (appelée solution particulière).

C'est-à-dire que toute solution y est de la forme $y_p + y_H$ où y_H est une solution quelconque de (E_H).

Proposition 2 (Principe de superposition)
Si y_1 est une solution particulière de $y' + ay = b_1$ et y_2 est une solution particulière de $y' + ay = b_2$, alors pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de $y' + ay = \alpha b_1 + \beta b_2$.

Équation d'ordre 2

Définition 2
On considère l'équation (E_H) sur $\mathbb{R}$: $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$.

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$.

Théorème 3 (Résolution de l'équation homogène, cas complexe)
On considère $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs complexes**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{C}$, alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right.$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors $y \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est solution de (E_H) ssi il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ tels que
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2) e^{rt} \end{array} \right.$$

Théorème 4 (Résolution de l'équation homogène, cas réels)
On considère $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et on cherche les solutions de (E_H) à **valeurs réelles**.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines r_1 et r_2 distinctes dans $\mathbb{R}$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H)) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double r alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{rt} \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$
3. Si l'équation possède deux solutions non réelles, qui sont donc complexes conjuguées et notées $\alpha \pm i\beta$, alors les solutions à valeurs réelles de (E_H) sont les fonctions de la forme
$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & e^{\alpha t}(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)) \end{array} \right. \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

Théorème 5
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq 0$ et soit $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. Soient $t_0 \in I$ et $v_0, v_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy (sur I)
$$\left\{ \begin{array}{rcl} ay''(t) + by'(t) + cy(t) & = & d \\ y(t_0) & = & v_0 \\ y'(t_0) & = & v_0' \end{array} \right.$$
admet une unique solution.
2. L'équation différentielle linéaire
$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$
admet au moins une solution y_p sur I, et l'ensemble de ses solutions est le plan affine $y_p + \mathcal{S}_0$ où $\mathcal{S}_0$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Proposition 3 (Principe de superposition)
Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ et $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. On suppose que $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ vérifient $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$ et $ay_2'' + by_2' + cy = f_2$.

Alors pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ est solution de l'équation différentielle $ay'' + by' + cb = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$.