Table des matières

I Rappels de 1ère année

Rappel : il s'agit de trouver toutes les FONCTIONS qui vérifient une certaine relation sur un intervalle donné

I.1 Les théorèmes

Voir la fiche compagnon pour les théorèmes.

I.2 Exemples

I.2.1 Sur les courbes intégrales

— Soient y_1 et y_2 des solutions de d'une même équation scalaire d'ordre 1. Pour $t_0 \in I$ quelconque, si $y_1(t_0) = y_2(t_0)$ alors y_1 et y_2 sont solutions d'un même problème de Cauchy et donc sont égales.

Ainsi deux solutions d'une même équation différentielle linéaire sont soient égales, soit leurs courbes représentatives ne se coupent pas.

— Pour les équations d'ordre 2, l'interprétation est un peu plus subtile. Deux courbes intégrales qui passent par un même point, en ayant la même tangente en ce point, sont confondues.

I.2.2 Méthode

Pour résoudre une équation du type $y' + a(t)y = b(t)$:

1. On commence par résoudre l'équation homogène associe : $y' + a(t)y = 0$, ce qui se fait par un premier calcul de primitive.
2. On détermine une solution particulière de l'équation avec second membre. Soit il y en a une évidente, soit via la méthode de variation de la constante. Ceci nécessite un deuxième calcul de primitive.
3. On explicite clairement l'ensemble des solutions demandé (problème de Cauchy, solutions ayant telle ou telle propriété...)

I.2.3 Exemple
Résolvons l'équation $(E) : ty' + y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

On a ici un problème, car le coefficient de y s'annule.

— On se place sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. L'équation devient $y'+\frac{1}{t}y = t$ et l'équation homogène a pour solution toutes les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{\lambda}{t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque.

— On applique la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme $y : t \mapsto \frac{\lambda(t)}{t} = \lambda(t)f(t)$ où $\lambda \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $f : t \mapsto \frac{1}{t}$ est une solution de l'équation homogène.

Alors, pour tout $t \in I$, $\lambda'(t)f(t) + \lambda(t)f'(t) + \frac{1}{t}f(t) = t \iff \lambda'(t)f(t) = t \iff \lambda'(t) = t^2$.

On prend $\lambda : t \mapsto \frac{t^3}{3}$ et $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$ est une solution particulière de E sur I.

— Les solutions de (E) sur l'intervalle I sont les fonctions de la forme $y : t \mapsto \frac{\lambda}{t} + \frac{t^2}{3}$ où λ est un réel quelconque.

I.2.4 Méthode : ordre 2 avec second membre

Le second membre est de la forme Ae^{kt} avec $A, k \in \mathbb{C}$ des constantes. On cherche y_p sous la forme $P(t)e^{kt}$ où P est :

1. K une constante si k n'est pas solution de l'équation caractéristique.
2. $t \mapsto Kt$ si k est une racine de l'équation caractéristique (ie e^{kt} est l'une des solution de l'équation homogène)
3. $t \mapsto Kt^2$ si k est une racine double de l'équation caractéristique.

Dans tous les cas, il faut déterminer la constante K

I.2.5 Exemple
Résoudre $y'' + y = \cos(x)$.

On applique le principe de superposition en écrivant $\cos(x) = \frac{1}{2}e^{ix} + \frac{i}{2}e^{-ix}$. Ainsi il suffit de trouver une solution particulière de chacune des équations

$$y'' + y = e^{ix}$$
$$y'' + y = e^{-ix}$$

où à chaque fois le coefficient constant dans l'exponentielle est racine simple de l'équation caractéristique.

II Ordre 2, coefficients non constants

II.1 La théorie

II.1.1 Théorème (Cauchy-Lipschitz)
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Soient également $t_0 \in I$, $v_0, v_0' \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ y(t_0) = v_0 \\ y'(t_0) = v_0' \end{cases}$$

possède une unique solution $\mathcal{C}^2$ définie sur I.

Preuve.
Admis ! ∎

II.1.2 Théorème
Soient $a, b, c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ est un espace affine de dimension 2. Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Plus précisément, les solutions de l'équation homogène (E_H) $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sont de la forme $t \mapsto \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)$ (pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ quelconques) où y_1, y_2 sont solutions de (E_H) et **non proportionnelles**. Toute solution de (E) est de la forme $y_p + y_H$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_H une solution quelconque de (E_H).

Preuve.
Le théorème précédent nous assure l'existence de y_p qui est une solution particulière de (E) (il suffit de choisir une condition particulière).

Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_H) et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E).

Posons $\varphi : \begin{cases} \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^I \\ y & \mapsto & y'' + ay' + by \end{cases}$ qui est facilement linéaire. Alors $\mathcal{S}_0 = \ker(\varphi)$ ($\mathcal{S}_0$ est un donc $\mathbb{K}$-ev, voir le cours de sup).

Alors pour $t_0 \in I$, $\begin{cases} \mathcal{S}_0 & \to & \mathbb{K}^2 \\ y & \mapsto & \begin{pmatrix} y(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} \end{cases}$ est linéaire et bijective d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. ce qui conclut sur la dimension de $\mathcal{S}_0$.

Soit maintenant $y \in \mathcal{D}^2(I, \mathbb{K})$. Alors $y \in \mathcal{S} \iff \varphi(y) = \varphi(y_p) \iff \varphi(y - y_p) = 0 \iff y - y_p \in \mathcal{S}_0$ ce qui prouve bien que $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{S}_0$ (plan affine). ∎

II.1.3 Proposition (Principe de superposition)
Il reste bien évidemment valable, même quand les coefficients ne sont pas constants.

II.2 Exemples de résolution

II.2.1 Méthode de résolution

Il n'y a pas de méthode générale ! On ne connaît que la forme des solutions, ainsi que la structure de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. En général, l'exercice propose une méthode pour trouver au moins une solution de l'équation homogène.

II.2.2 Recherche d'une solution DSE

Toujours en deux phases :

1. Analyse : on suppose qu'il existe une solution DSE de rayon $R > 0$ et on trouve une relation sur les coefficients, que l'on résout.
2. Synthèse : on montre que la ou les fonctions trouvées sont solution. Soit en reconnaissant le DSE (fonction usuelle), soit en prouvant que le rayon de convergence trouvé est > 0. Il reste à vérifier (automatique normalement), que la fonction ainsi définie est bien solution, sur un intervalle que l'on précisera bien.

Résolvons sur des intervalles le plus grand possible $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$ (E).

On cherche une solution y sous la forme $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, ie y est la somme d'une série entière sur un intervalle $]-r, r[$ pour $r > 0$.

Alors, pour $t \in]-r, r[$, $y'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1}$ et $y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$

y est solution de (E) ssi pour tout $t \in]-R, R[$

$$t^2(1-t)y''(t) - t(1+t)y'(t) + y(t) = 0$$
$$\iff \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^n - \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$$
$$\iff \sum_{n=2}^{+\infty} (-n(n-1)-n)a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n(n-1)-n+1)a_n t^n - a_1 t - a_1 t^2 + a_0 + a_1 t = 0$$
$$\iff -\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 a_n t^{n+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 = 0$$
$$\iff -\sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2 a_n t^n - a_1 t^2 + a_0 = 0$$
$$\iff \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)^2 (a_n - a_{n-1}) t^n + a_2 t^2 - a_1 t^2 + a_0 = 0$$

Par unicité des coefficients d'un DSE de rayon non nul, $a_0 = 0$, $a_1 = a_2$ et $\forall n \geqslant 3$ $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$ donc $\forall n \geqslant 2$ $a_n = a_{n-1}$.

Finalement, $a_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$ $a_n = a_1$ donc $y(t) = a_1 \sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^n = a_1 t \sum\limits_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} = \frac{a_1 t}{1-t}$.

Synthèse : le rayon de convergence de la série trouvé étant égal à 1, l'unicité est valable et donc $y : t \mapsto \frac{a_1 t}{1-t}$ est solution de (E) sur $]-1, 1[$ pour toute valeur de a_1. C'est mieux que ce à quoi on pouvait s'attendre, vu que le coefficient de y'' s'annule en 1 et 0.

Il nous manque une solution de cette équation homogène, non proportionnelle à $t \mapsto \frac{t}{1-t}$.

II.2.3 Proposition (Trouver une deuxième solution)
On considère l'équation différentielle $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ sur l'intervalle I.

Si on connaît une solution y_0 de (E) **qui ne s'annule pas** sur I, alors on fait un changement de fonction inconnue, $\lambda = \frac{y}{y_0}$ ie on cherche une autre solution y sous la forme $y = \lambda y_0$ où $\lambda \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ est notre inconnue.

En replaçant dans l'équation, le terme en λ disparaît toujours.

II.2.4 Exemple
O reprend $t^2(1-t)y'' - t(1+t)y' + y = 0$ (E) avec $y_0 : t \mapsto \frac{t}{1-t}$. On cherche y sous la forme $y = \lambda y_0$ sur l'intervalle $]0, 1[$ (pour l'instant).

Alors y est solution de (E) ssi

$$t^2(1-t)(\lambda'' y_0 + 2\lambda' y_0' + \lambda y_0'') - t(1+t)(\lambda' y_0 + \lambda y_0') + \lambda y_0 = 0$$

ssi $t^2(1-t)\lambda'' y_0 + \lambda'(2t^2(1-t)y_0' - t(1+t)y_0) = 0$

Or $t^2(1-t)y_0 = t^3$ et

$$2t^2(1-t)y_0'(t) - t(1+t)y_0(t) = 2t^2 \frac{1-t+t}{(1-t)} - \frac{t^2(1+t)}{1-t} = t^2 \frac{1-t}{1-t} = t^2.$$

Ainsi λ vérifie $\lambda'' + \frac{1}{t}\lambda' = 0$ et donc $\lambda'(t) = C_1 \frac{1}{t}$ et $\lambda(t) = C_1 \ln|t| + C_2$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Finalement, les solutions de (E) sur $]0, 1[$ sont de la forme $y : t \mapsto C_1 \frac{t\ln(t)}{1-t} + C_2 \frac{t}{1-t} = \frac{t}{1-t}(C_1 \ln(t) + C_2)$.

Le calcul de vérification montre que $y : t \mapsto \frac{t}{1-t}(C_1 \ln|t| + C_2)$ est solution sur les intervalles $]-\infty, 0[,]0, 1[,]1, +\infty[$.

Index