Devoir surveillé n°5

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. On considère la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Montrer, sans calculer d'espace propre, que A est canoniquement associée à une symétrie par rapport à un plan.
   (b) Préciser les éléments de cette symétrie (par rapport à ..., dans la direction ...)
2. On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^4 + y^4 - 4xy \end{array} \right.$
   (a) Calculer les éventuels points critiques de f.
   (b) Préciser pour chaque point critique si f présente un minimum local maximum local ou si la surface représentative présente un point col.
3. Tracer la conique d'équation $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, en précisant l'axe focal.
4. Tracer la conique d'équation $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$, en précisant l'axe focal.

Exercice 2

On considère l'ensemble C des points de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation

$$C : xy - z^2 = 0,$$

c'est-à-dire qu'un point de l'espace dont les coordonnées sont $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ dans le repère canonique est un point de C ssi $x_0 y_0 - z_0^2 = 1$.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique usuel.

Les deux parties ne sont pas indépendantes, en particulier on utilisera les notations de la partie I dans la partie II

Partie I : Étude des symétries

1. Donner deux exemples de points de C par leurs coordonnées.
2. On considère s_1 la symétrie orthogonale par rapport au plan (xOy).
   Donner sans preuve les coordonnées de $s_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
3. Prouver que C est symétrique par rapport au plan (xOy), c'est à dire que si $M \in C$ alors $s_1(M) \in C$.
4. On considère la droite $D = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note p la projection orthogonale sur D et s le retournement d'axe D (ie la symétrie orthogonale par rapport à D).
   (a) Montrer que la matrice de p dans la base canonique est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) Montrer que C est symétrique par rapport à D, c'est à dire que si $M \in C$ alors $s(M)$ est encore dans C.
5. On note $\mathcal{P}_0$ le plan d'équation $\mathcal{P}_0 : x + y = 0$. Donner un lien entre D et $\mathcal{P}_0$ puis déduire que la matrice dans la base canonique de la réflexion de plan $\mathcal{P}_0$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Montrer que C est symétrique par rapport à $\mathcal{P}_0$ et donner un autre axe de symétrie de C.

Partie II : Quelques intersections

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{P}_\alpha$ et Q_α les plans affines d'équations respectives

$$\mathcal{P}_\alpha : x + y = \alpha,\ Q_\alpha : z = \alpha$$

1. Pour $\alpha \neq 0$, exprimer $\mathcal{P}_{-\alpha}$ en fonction de $\mathcal{P}_\alpha$ ainsi que $Q_{-\alpha}$ en fonction de Q_α en utilisant à chaque fois l'une des symétrie de la partie précédente.
2. Décrire rapidement les ensembles $C \cap \mathcal{P}_0$ et $C \cap Q_0$. On pourra tracer un schéma dans le plan Q_0 pour la deuxième intersection.
3. On considère dans cette question que $\alpha > 0$.
   (a) Donner la nature de la conique obtenue comme $C \cap Q_\alpha$ (on ne demande pas encore le tracé, seulement la nature).
   (b) Dans le repère de centre $O_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \in Q_\alpha$ et dont les axes sont dirigés par $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{\jmath} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tracer la conique $C \cap Q_\alpha$ dont l'équation est $xy = \alpha^2$.
4. On considère dans cette question que $\alpha = 2$.
   (a) On note $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur unitaire de D. Montrer que $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_0$ et trouver une base orthonormée directe (u, v, w) de l'espace $\mathbb{R}^3$.
   (b) On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u, v, w)$ où $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique. Pour un pour $M \in \mathbb{R}^3$, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}_c$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B} = (u, v, w)$. Donner le lien entre X, P et X'.
   (c) Dans le repère $\mathcal{R}' = (O, u, v, w)$, montrer que l'équation de $\mathcal{P}_2$ devient $x' = \sqrt{2}$ et celle de C devient $\frac{(x')^2}{2} - \frac{(z')^2}{2} - (y')^2 = 0$.
   (d) Tracer dans le repère où elle est exprimée la conique d'équation $(y')^2 + \frac{(z')^2}{2} = 1$: les axes sont (Oy') et (Oz'). On fera le tracé sur une feuille de papier millimétré, en prenant 4cm comme unité. Justifier comment vous avez placé les points de coordonnées non entières.
   (e) Justifier que la matrice de passage $P \in SO_3(\mathbb{R})$ sans calcul et donner la nature (seulement, pour l'instant) de f, l'endomorphisme canoniquement associé à P.
   (f) Donner les éléments géométriques permettant la caractérisation de f (c'est à dire donner une interprétation géométrique précise de l'opération qui transforme le repère canonique en $\mathcal{R}'$).
5. Pour un $\alpha > 0$, on définit le point $\Omega_\alpha = O + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} u$ (ses coordonnées sont celles du vecteur $\frac{\alpha}{\sqrt{2}} u$). Tracer $C \cap \mathcal{P}_\alpha$ dans le repère (Ω_α, v, w).

Exercice 3 (Étude d'une symétrie)

Partie I : une symétrie

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que deux sous-espaces de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{D} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{P} = \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On note pour la suite u_1, u_2, u_3 les trois colonnes précédentes, dans cet ordre.

On note également $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = A$ (f est l'application linéaire canoniquement associée à A).

1. Montrer que $\mathcal{D} \oplus \mathcal{P} = \mathbb{R}^3$.
2. Montrer que f est la symétrie par rapport à $\mathcal{P}$, dans la direction $\mathcal{D}$.
3. f est-elle une symétrie orthogonale ?
4. Donner une base composée de vecteurs propres de f ainsi qu'une matrice diagonale semblable à A.

Partie II : un autre produit scalaire

Dans cette partie, on cherche à construire un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$ tel que f devienne une symétrie orthogonale pour φ.

On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^3$.

1. Phase d'analyse. On suppose que l'on dispose d'un produit scalaire φ tel que $\forall i, j \in [\![1, 3]\!]\ \varphi(u_i, u_j) = \delta_{i,j}$ où les vecteurs u_i ont été défini dans la partie I.
   (a) Sous cette hypothèse, comment qualifier la base $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ pour le produit scalaire φ ?
   (b) Qu'en déduire pour la symétrie f ?
   (c) Pour $u \in \mathbb{R}^3$ on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}_c$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.
   Exprimer le lien entre X et X' puis $\varphi(u, u)$ en fonction de x', y', z'.
   On pourra introduire une matrice si besoin.
   (d) Exprimer alors $\varphi(u, u)$ en fonction de X et de la matrice introduite à la question précédente.
2. Synthèse. On note $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$ et $C = (P^{-1})^T P^{-1}$.
   (a) Calculer P^{-1} puis montrer que $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
   (b) On note maintenant $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (U, V) & \mapsto & U^T C V \end{array} \right.$.
   Montrer que φ est symétrique et bilinéaire.
   (c) Justifier que C est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
   (d) En vous inspirant des réductions de coniques, en déduire que φ est un produit scalaire.
   (e) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée pour φ et en déduire que f est une symétrie orthogonale pour le produit scalaire φ

Partie III : cas général

On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C = A^T A$.

1. Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n\ X^T C X \geqslant 0$.
2. Montrer que C est diagonalisable à valeurs propres réelles.
3. Montrer que les valeurs propres de C sont positives.
4. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ ssi $C \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Soit E un espace euclidien munit d'un produit scalaire noté $(.|.)$. On considère une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E. Montrer que l'on peut définir un autre produit scalaire φ sur E tel que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée pour φ.

Exercice 4 (($\star$) Autour des séries convergentes)

On note E l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\sum u_n^2$ converge.

1. Donner un exemple de suite (u_n) telle que $(u_n) \in E$ mais $\sum u_n$ diverge.
2. Soient $x, y \in [0, +\infty[$. Montrer que $|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$.
3. Soient $(u_n), (v_n) \in E$. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge
4. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réelles.
5. On pose, pour $(u_n), (v_n) \in E$
$$\varphi((u_n), (v_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$
   Par convention, si une suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang, on considère que ses premiers termes sont nuls.
   Montrer que φ est un produit scalaire sur E, noté $\langle ., .\rangle$ dans la suite.
6. On note $u_n = a^n$, $v_n = \frac{1}{n}$ et $w_n = \frac{1}{n!}$.
   (a) Pour quels $a \in \mathbb{R}$ a-t-on $(u_n) \in E$? Justifier que $(v_n), (w_n) \in E$.
   (b) Calculer $\langle (u_n), (v_n)\rangle$ et $\langle (u_n), (w_n)\rangle$.
   (c) Trouver les α, β tels que $(u_n) \perp \alpha(v_n) + \beta(w_n)$.
   Comment interpréter ce résultat ?