Table des matières

I	Intégrales dépendant d'un paramètre	1
I.1	Fonctions définies par une intégrale	1
I.2	Continuité	1
II	Dérivabilité	1
II.1	Approche intuitive	1
II.2	Le théorème	1

I Intégrales dépendant d'un paramètre

I.1 Fonctions définies par une intégrale

I.2 Continuité

Théorème 1

(On s'intéresse ici à la continuité d'une fonction de la forme $f : x \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt$)

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \begin{cases} I \times J & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto \varphi(x, t) \end{cases}$ une fonction. Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur J .
2. Pour $t \in J$ fixé, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur I .
3. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J \quad |\varphi(x, t)| \leq g(t)$$

Alors la fonction $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt \end{cases}$ est définie et continue sur l'intervalle I .

Proposition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

1. f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I .
2. Si $I =]0, +\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ssi f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

II Dérivabilité

II.1 Approche intuitive

II.2 Le théorème

Théorème 2

(On s'intéresse ici à la classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction de la forme $f : x \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt$)

Soit I, J deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$, $\varphi : \begin{cases} I \times J & \rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) & \mapsto \varphi(x, t) \end{cases}$ une fonction. Supposons que :

1. Pour $x \in I$ fixé, $\varphi_x : t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur J et **intégrable** sur J .
2. Pour $t \in J$ fixé, $\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
3. Pour $x \in I$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = \varphi'_t(x)$ (la **dérivée partielle dont on vient de prouver l'existence, mais comme fonction de t**) est continue sur J .
4. (hypothèse de domination) Il existe $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, continue et **intégrable** sur J telle que

$$\forall (x, t) \in I \times J \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$$

Alors la fonction $f : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{K} \\ x & \mapsto \int_J \varphi(x, t) dt \end{cases}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I . De plus, pour $x \in I$

$$f'(x) = \int_J \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt$$