

Table des matières

I Cadre théorique

I.1	Ensembles dénombrables	1
I.2	Espaces probabilisable	1
I.3	Espace probabilisé	1
I.4	Propriétés des probabilités	2

II Calcul de probabilités

II.1	Systèmes complets	2
II.2	Probabilités conditionnelles	3
II.3	Événements indépendants	3

III Variables aléatoires

III.1	Lois	3
III.2	Loi usuelles	4
III.3	Loi conjointe, indépendance	4

IV Moments d'une variable aléatoire

IV.1	Espérance, variance	4
IV.2	Variance	5
IV.3	Covariance	5

V Fonctions et probabilités

V.1	Fonction de répartition	5
V.2	Fonction génératrice	6

VI Etude asymptotique

VI.1	Interprétation de la loi de Poisson	6
VI.2	Loi des grands nombres	6

I Cadre théorique

I.1 Ensembles dénombrables

Définition 1

Soit E un ensemble quelconque.

- On dit que E est dénombrable ssi il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ bijective. En d'autre termes, on peut écrire $E = \{x_0, x_1, \dots\}$ sans oublier un seul élément.
- On dit que E est au plus dénombrable ssi E est fini ou dénombrable.

Théorème 1

- $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est dénombrable.
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sont dénombrables.
- Si E et F sont dénombrables alors $E \times F$ est dénombrable.

I.2 Espaces probabilisable

Définition 2

Soit Ω un ensemble que l'on appellera univers. Une **tribu** sur Ω est un sous ensemble T de $\mathcal{P}(\Omega)$ (les éléments de T sont des sous ensembles de Ω) qui vérifie les 3 conditions :

- $\Omega \in T$
- $\forall A \in T \quad A^C = \overline{A} = \Omega \setminus A \in T$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$.

Les éléments de T (qui sont des ensembles, rappelons le) sont des **événements**. Le couple (Ω, T) est un **espace probabilisable**.

Proposition 1

Soit (Ω, T) un espace probabilisable.

- $\emptyset \in T$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in T$. De plus, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c}$

I.3 Espace probabilisé

Définition 3

Soit Ω un ensemble et T une tribu sur Ω . Une **probabilité** sur Ω est une fonction $\mathbb{P}$ qui associe à chaque événement A une probabilité $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ avec les contraintes suivantes :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux (ie disjoints deux à deux), alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) : \text{propriété de } \sigma\text{-additivité}$$

En particulier, toute série de la forme précédente doit converger vers un nombre dans $[0, 1]$.

Le triplet $(\Omega, T, \mathbb{P})$ est appelé un **espace probabilisé**. Dans la suite du cours, nous utiliserons ces notations.

Définition 4

Soit A un événement.

1. Si $A \neq \emptyset$ et $\mathbb{P}(A) = 0$ on dit que A est **négligeable**.
2. Si $A \neq \Omega$ et $\mathbb{P}(A) = 1$ on dit que A est presque sûr.

I.4 Propriétés des probabilités**Proposition 2 (Adaptation de la 1ère année)**

Soit $(\Omega, T, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient A, B deux événements et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
2. $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$.
5. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^N A_k\right) \leq \sum_{k=0}^N \mathbb{P}(A_k)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Théorème 2

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements.

1. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N} A_n \subset A_{n+1}$) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion ($\forall n \in \mathbb{N} A_{n+1} \subset A_n$) alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Le résultat important est l'existence de ces limites.

Proposition 3 (Sous-additivité)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

II Calcul de probabilités**II.1 Systèmes complets****Proposition 4 (Définition d'une probabilité)**

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements incompatibles deux à deux, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \in [0, 1]$$

et toute série de la forme précédente (série de probabilités d'événements deux à deux incompatibles) est une série à termes positifs convergente, de limite (somme de la série) dans $[0, 1]$

Définition 5

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n un événement (donc A_n est un sous-ensemble de Ω).

On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements ssi $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (disjoints 2 à 2) et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Proposition 5

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$

Définition 6

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n un événement (donc A_n est un sous-ensemble de Ω).

On dit que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements ssi

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$$

(les A_n sont disjoints 2 à 2) et

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1.$$

En d'autre termes, la probabilité qu'aucun des A_n ne soit réalisé est nulle, et l'un exactement des A_n est réalisé presque sûrement (avec une probabilité 1, un et un seul des A_n est réalisé).

Proposition 6 (Système complet d'événements)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système (quasi)-complet d'événements et B est un événement, alors

1. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$
2. $\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_n)$

On retrouve le cours de première année en prenant un système complet fini (tous les A_n sont vides sauf les quelques premiers).

II.2 Probabilités conditionnelles

Définition-Proposition 1

Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Pour un événement A , la probabilité de A sachant B est $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
2. L'application $\mathbb{P}_B : \begin{cases} T & \rightarrow [0, 1] \\ A & \mapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \end{cases}$ est une probabilité. C'est la probabilité conditionnelle sachant B .

Proposition 7 (Formule des probabilités composées)

1. Pour A, B des événements, si $\mathbb{P}(B) > 0$ alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$. Rappelons en plus que $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$
2. Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements tels que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}\left(A_n \mid \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right)$$

Proposition 8 (Probabilité totales)

Il s'agit de traduire les propriétés des probabilités vis-à-vis de l'intersection en termes de probabilités conditionnelles.

1. Soit A un événement ni négligeable ni presque sûr ($\mathbb{P}(A) \in]0, 1[$). Alors $A, \bar{A}$ forment un système complet d'événements et pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A})\mathbb{P}(\bar{A}).$$

2. Pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements (y compris fini) et B un événement

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n)$$

où l'on convient que $\mathbb{P}(B|A_n)\mathbb{P}(A_n) = 0$ si $\mathbb{P}(A_n) = 0$.

Proposition 9 (Formule de Bayes)

Soient A, B deux événements non négligeables ($\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$). Alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(A|B).$$

En pratique, on calcule souvent le dénominateur par la formule des probabilités totales. $n \in \mathbb{N}$.

II.3 Événements indépendants

Définition 7

Soient A, B deux événements

On dit que A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Définition 8

Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. On dit qu'ils sont indépendants ssi

$$\forall I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$$

Proposition 10

Si (A, B) sont indépendants, il en est de même de $(A^c, B), (A, B^c), (A^c, B^c)$. On peut généraliser ce résultat à $n > 2$ événements indépendants (et mettre des complémentaires ou non où bon nous semble).

III Variables aléatoires

III.1 Lois

Définition 9

1. Une variable aléatoire **discrète** est une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ où $X(\Omega)$ (l'ensemble des valeurs de X) est dénombrable ou fini.
On impose en plus que l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ est un événement (un élément de notre tribu) pour tout $x \in X(\Omega)$.
2. Si H est un ensemble de valeurs de X (on a donc $H \subset X(\Omega)$), on note $(X \in H)$ l'événement " X prend l'une des valeurs dans H ", c'est à dire l'ensemble $X^{-1}(H)$ (image réciproque par la fonction X de l'ensemble H).
3. Si x est l'une des valeurs que peut prendre X (ie. $x \in X(\Omega)$), on note $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\})$, c'est à dire l'événement " X prend la valeur x "

Théorème 3

Soit X une variable aléatoire discrète sur Ω . Notons $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} = X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs. Alors $((X = x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Définition 10

Soit X une variable aléatoire discrète. La loi de X est l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X = x) \end{cases}$$

Avec les notations du théorème précédent, il s'agit de donner, $\mathbb{P}(X = x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.2 Loi usuelles

Définition 11

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ (on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) ssi

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

- L'ensemble des valeurs de X est $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
- On peut interpréter X comme donnant le rang d'apparition du premier succès lors de répétitions INDÉPENDANTES d'une expérience de probabilité de succès p .

Proposition 11

Soit X une variable aléatoire, $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour un $p \in]0, 1[$. Soient $n, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\mathbb{P}(X > n + k | X > n) = \mathbb{P}(X > k)$.

On dit que la loi géométrique est sans mémoire.

Définition 12

Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit la loi de Poisson de paramètre λ (noté $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$) ssi

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

III.3 Loi conjointe, indépendance

Définition 13

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω . On note $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_m | m \in \mathbb{N}\}$ les valeurs possibles de X et Y respectivement.

1. (X, Y) est une variable aléatoire $\omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$.
2. La **loi conjointe** du couple (X, Y) est la loi décrite par la donnée de $\mathbb{P}(X = x_n, Y = y_m)$ pour toutes les valeurs de n et m .
Il s'agit de la loi de la variable discrète $Z = (X, Y)$.
3. Les lois marginales de la loi conjointe de (X, Y) sont les lois de X et Y .
4. Pour $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé tel que $\mathbb{P}(X = x_{n_0}) \neq 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_{n_0})$ est la loi donnée par $\mathbb{P}(Y = y_m | X = x_{n_0})$

Définition 14

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes sur Ω . on dit qu'elles sont indépendantes ssi

$$\forall x, y \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

ie ssi les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont deux à deux indépendants pour toutes les valeurs possibles de x et y .

Lorsque X et Y sont indépendantes, on note $X \perp\!\!\!\perp Y$

Proposition 12

Soient X, Y deux variables indépendantes et $G \subset X(\Omega), H \subset Y(\Omega)$. Alors

$$\mathbb{P}((X, Y) \in G \times H) = \mathbb{P}(X \in G) \times \mathbb{P}(Y \in H).$$

Proposition 13

Si X, Y sont des variables aléatoires discrètes indépendantes et si on peut calculer $f(X)$ et $g(Y)$ pour des fonctions f et g alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont des variables aléatoires et sont indépendantes.

On peut résumer par : $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

Définition 15

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des variables aléatoires discrètes sur Ω . On dit qu'elles sont indépendantes ssi pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$,

$$\forall x_1 \in X_{i_1}(\Omega), \dots, x_k \in X_{i_k}(\Omega) \quad \mathbb{P}(X_{i_1} = x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_{i_k} = x_k) = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}(X_{i_j} = x_{i_j}).$$

Autrement dit, on peut calculer toute probabilité d'intersection finie par produit.

IV Moments d'une variable aléatoire

IV.1 Espérance, variance

Définition 16

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. On dit que X est d'espérance finie ssi $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge **absolument**.

Dans ce cas, on appelle **espérance de X** et on note $E(X)$ le réel $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$.

Proposition 14

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour $p \in]0, 1[$ alors X est d'espérance finie et $E(X) = \frac{1}{p}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ alors X est d'espérance finie et $E(X) = \lambda$.

Proposition 15 (Propriétés de l'espérance)

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur Ω , **d'espérances finies**.

1. Linéarité : soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $\lambda X + \mu Y$ est d'espérance finie et $E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$.
2. Positivité : si $X \geq 0$ alors $E(X) \geq 0$.
3. Croissance : si $\forall \omega \in \Omega \quad X(\omega) \leq Y(\omega)$ (que l'on note $X \leq Y$) alors $E(X) \leq E(Y)$.
4. Si X et Y sont **indépendantes** alors XY est d'espérance finie et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Théorème 4 (Théorème de transfert)

Soit X une variable aléatoire discrète et f une fonction définie sur $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs réelles. $f(X)$ est d'espérance finie ssi $\sum f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente.

Alors $E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$. Ainsi l'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X .

IV.2 Variance**Définition-Proposition 2**

Soit X une variable aléatoire discrète. Si X^2 est d'espérance finie alors X aussi. Dans ce cas :

1. on appelle **variance** de X le nombre réel positif $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$.
2. on appelle **écart-type** de X le nombre réel positif $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Si $\sigma(X) = 1$, on dit que X est réduite.

Proposition 16

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ pour $p \in]0, 1[$ alors X est de variance finie et $V(X) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$ alors X est de variance finie et $V(X) = \lambda$.

Proposition 17

Soit X une variable aléatoire réelle de variance finie et $a, b \in \mathbb{R}$.

Alors $aX + b$ est de variance finie et $V(aX + b) = a^2V(X)$.

IV.3 Covariance**Définition-Proposition 3**

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. Si X et Y admettent un moment d'ordre 2 (ie. admettent une variance finie) alors la variable aléatoire $(X - E(X))(Y - E(Y))$ est d'espérance finie.

Dans ce cas on appelle covariance de X et Y le réel

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Proposition 18

Dans les conditions de la définition précédente :

1. $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. Si X et Y sont indépendantes **alors** $\text{cov}(X, Y) = 0$.

3. la covariance est bilinéaire et symétrique.

Proposition 19

Soit X, Y deux variables aléatoires admettant une variance finie. Alors $X + Y$ est de variance finie et

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$$

Théorème 5 (Cauchy-Schwartz)

On a $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$

Définition 17

Soient X, Y deux variables aléatoires de variance finie et non nulle. Le coefficient de corrélation de X et Y est

$$\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \in [-1, 1]$$

V Fonctions et probabilités**V.1 Fonction de répartition****Définition 18**

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle fonction de répartition de X et on note F_X la fonction

$$F_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{cases}$$

Proposition 20

Avec les notations de la définition, on a :

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Proposition 21

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. X est d'espérance finie ssi $\sum \mathbb{P}(X \geq n)$ converge et dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$$

V.2 Fonction génératrice

Définition 19

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. La fonction génératrice (ou série génératrice) de X est la fonction

$$G_X : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

G_X est définie au moins sur le segment $[-1, 1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$ et $G_X(1) = 1$.

Théorème 6

Si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et **indépendantes**, notons R_X et R_Y les rayons de convergence de G_X et G_Y respectivement. Posons également $r = \min(R_X, R_Y)$

Alors G_{X+Y} est de rayon $R \geq r$ et

$$\forall t \in]-r, r[\quad G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)$$

Théorème 7

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.

1. X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et alors $E(X) = G'_X(1)$.
2. X est de variance finie ssi G_X est deux fois dérivable en 1 et alors

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2.$$

VI Etude asymptotique

VI.1 Interprétation de la loi de Poisson

Proposition 22

Soit $\lambda > 0$.

On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ où $p_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

VI.2 Loi des grands nombres

Théorème 8 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives, d'espérance finie.

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Théorème 9 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire de variance finie.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorème 10 (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2.

On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et on note $m = E(X_1)$ l'espérance commune aux

X_k .

$$\forall \eta > 0 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \eta\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour un $\eta > 0$ fixé, la limite est nulle.