Devoir maison n°13

A rendre le 26/03

Exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \,\mathrm{d}t$ converge ssi $x > -1$.

   Rappelons que $a^b = e^{b\ln(a)}$ lorsque $b \notin \mathbb{Z}$.

2. On considère maintenant la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl}]-1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

   (a) Soit $a > -1$. Montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$.

   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ et exprimer f'.

   (c) Sur quel intervalle, le plus grand possible, peut-on affirmer que f est continue ? $\mathcal{C}^1$?

3. ($\star\star$) Pour $\alpha < 1$, rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}$.

   Montrer alors que $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$.

4. ($\star$) Dresser un tableau de variations de f sur $]-1, +\infty[$, incluant les limites.

Indications

1. x est une puissance fixée, on doit pouvoir calculer un équivalent en 0.
   — Pour la domination, on sait que $x \geqslant a$. Passer sous forme exponentielle pour l'exploiter.
   Comparer à Riemann pour prouver l'intégrabilité.
   — Comme vu en cours, l'intégrabilité dans la première hypothèse est garantie par la question précédente.
   Pour la domination, même technique, mais on doit trouver un $\alpha \in]-1, a[$ pour comparer.
   — On a un résultat du cours pour cette situation.
2. On pourra montrer l'inégalité classique $\forall t \geqslant 0 \ \sin(t) \leqslant t$. Pourquoi pas en utilisant l'inégalité des accroissements finis.