

Techniques de base

Exercice 1

Montrer que les fonctions suivantes sont continues :

1. $f_1 : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x(t) dt$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. $f_2 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-xt} dt$ sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$, puis sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$:

1. $f_1 : x \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + x \sin(t)) dt$ sur $[-a, a]$ pour $a \in]0, 1[$. Sur quel intervalle f_1 est-elle $\mathcal{C}^1$ finalement ?
2. $f_2 : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$ sur $\mathbb{R}$.

Applications

Exercice 3

1. Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

2. Déterminer une équation différentielle simple vérifiée par f et en déduire une valeur simple pour $f(x)$ (on pourra admettre que $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 4

On pose $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$.
3. Exprimer et calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Pour $x, y > 0$, on pose $F(x, y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$.

1. Pour $y > 0$ fixé, montrer que $x \mapsto F(x, y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[$ où $a > 0$.
2. Justifier que la question précédente entraîne la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Calculer $\frac{\partial F}{\partial x}$ et en déduire la valeur de $F(x, y)$ pour tout $x, y > 0$.