

Table des matières

I Etude métrique	1
I.1 Longueur d'une courbe	1
I.2 Abscisse curviligne	1
I.3 Repère de Frenet	1
I.4 Courbure	2
II Enveloppe, développée	2
II.1 Courbe développée	2
II.2 Enveloppe d'une famille de droite	2

I Etude métrique

I.1 Longueur d'une courbe

Définition 1

Soient $a, b \in I$. On appelle longueur (algébrique) de $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ entre les points de paramètres a et b le réel $\int_a^b \|f'(t)\| dt$.

I.2 Abscisse curviligne

Définition 2

Soit $t_0 \in I$.

On appelle abscisse curviligne de f d'origine t_0 la fonction $s : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du \end{cases}$.

A retenir : $\frac{ds}{dt} = \|f'\|$ et lorsque cela a du sens, $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|f'\|}$.

Proposition 1

On considère une courbe régulière f de classe $\mathcal{C}^k$.

L'abscisse curviligne d'origine t_0 est une bijection $\mathcal{C}^k$ dont la réciproque est $\mathcal{C}^k$.

Interprétation : on peut, dans le cas d'une courbe régulière, repérer un point de la trajectoire non plus par l'instant où on y passe mais par la distance (algébrique) à l'origine fixée. En effet tout point est à une distance donnée (surjectivité) et à une distance donnée correspond un seul point (injectivité).

De plus, on ne change pas la classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe paramétrée si on choisi d'utiliser l'abscisse curviligne d'origine t_0 pour paramétrer (repérer les points).

Proposition 2

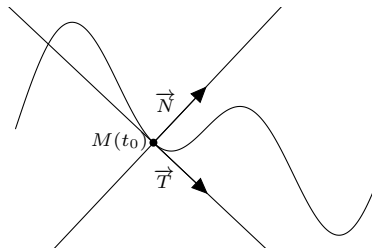
Pour une courbe régulière f , on a $\frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|f'\|} \frac{df}{dt}$. C'est un vecteur directeur unitaire de la tangente pour chaque paramètre.

I.3 Repère de Frenet

Définition 3

Soit $t_0 \in I$. On note $\vec{T}(t_0) = \frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$ (vecteur unitaire tangent de f en t_0) et $\vec{N}(t_0)$ (vecteur unitaire normal de f en t_0) le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{T}(t_0)$.

Le repère $(M(t_0), \vec{T}(t_0), \vec{N}(t_0))$ est appelé repère de Frenet de f en t_0 .



La droite affine $M(t_0) + \text{Vect}(\vec{N}(t_0))$ (passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{N}(t_0)$) est appelée droite **normale** à la courbe au point $M(t)$.

Proposition 3

Lorsque f est une courbe régulière et $\mathcal{C}^2$, $\frac{d\vec{T}}{dt}$ est toujours colinéaire à $\vec{N}$.

De même $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est toujours colinéaire à $\vec{N}$.

I.4 Courbure

Définition 4

Soit f une courbe régulière et de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur l'intervalle I .

En tout $t \in I$, on note $\gamma(t)$ le nombre vérifiant

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$$

Cette formule est appelée **formule de Frenet**.

Une analyse immédiate des unités montre que γ s'exprime en m^{-1} car s est une longueur.

On admet provisoirement que la fonction γ ainsi définie sur I est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ lorsque f est de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 1 (Détermination angulaire)

Il existe une fonction $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in I \quad \vec{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix} = \cos(\alpha(t))\vec{i} + \sin(\alpha(t))\vec{j}$$

Ainsi $\alpha(t)$ est l'angle entre $\vec{i}$ (le premier vecteur de la base canonique) et $\vec{T}(t)$.

Proposition 4

Avec les notations du théorème précédent, $\gamma = \frac{d\alpha}{ds}$

II Enveloppe, développée

II.1 Courbe développée

Définition 5

Un point d'une courbe paramétrée est dit **birégulier** ssi les vecteurs vitesse et accélération en ce point ne sont pas colinéaires. On a donc (avec les notations classiques) les entiers p et q qui valent $p = 1$ et $q = 2$.

Proposition 5

Pour une courbe régulière $\mathcal{C}^2$, le point de paramètre t est birégulier ssi $\gamma(t) \neq 0$.

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière (tous les points sont biréguliers). Le rayon de courbure au point t est $R(t) = \frac{1}{\gamma(t)}$ et le centre de courbure est le point $C(t) = M(t) + R(t)\vec{N}(t)$ ie $\overrightarrow{MC} = R\vec{N}$.

On peut évidemment repérer M par son abscisse curviligne et exprimer toutes les quantités en fonction de s .

Définition 7

Le lieu des centres de courbure d'une courbe s'appelle la courbe développée. C'est la courbe $t \mapsto \overrightarrow{OC}(t)$.

II.2 Enveloppe d'une famille de droite

Définition 8

Soit $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ une famille de droite. On dit que $(\mathcal{D}_t)_{t \in I}$ admet la courbe $f : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ comme enveloppe ssi pour tout $t \in I$ on a

1. $M(t) \in \mathcal{D}_t$
2. $\mathcal{D}_t$ est tangente à f en $M(t)$.

Proposition 6

Une enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = A(t) + \text{Vect}(\vec{u}(t))$ est donnée par $f : t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.

Proposition 7

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R}^2)$ une courbe birégulière. La courbe développée de f est également l'enveloppe de la famille $\mathcal{D}_t = M(t) + \text{Vect}(\vec{N}(t))$ (la famille des normales).

On peut remplacer le vecteur $\vec{N}(t)$ par n'importe quel vecteur proportionnel et non nul.

Les normales à f sont tangentes à la courbe développée de f .