I Frenet, courbure

Exercice 1 (Application simple de la définition)

On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Calculer la longueur de la courbe entre les instants 0 et $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Exercice 2
Donner la longueur du support de la courbe

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix} = (1+\cos(t)) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bonus : Donner en fonction de t le module et un argument de l'affixe du point $M(t)$.

Exercice 3
On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix}$ dont le support est la courbe d'équation $y = \ln(\cos(x))$.

1. Donner l'ensemble de définition ainsi qu'un ensemble d'étude de f.
2. Calculer en chaque point régulier le repère de Frenet.
3. Calculer la courbure en tout point régulier.
4. En déduire une expression de la courbe développée.

Exercice 4

1. **Etude géométrique** Donner un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée vérifiant

$$\gamma(s) = s, \ M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou encore, la courbure au point de paramètre s (l'abscisse curviligne d'origine 0) vaut s. On pourra utiliser le lien entre γ et α

Utilisation : cette courbe paramétrée est utilisée pour amorcer les virages après une ligne droite (voies ferroviaires, sortie d'autoroute) : le fait que la courbure augmente linéairement permet d'éviter l'à-coup que provoquerait le passage d'une ligne droite à un arc de cercle (penser force centrifuge et rayon).

2. **Point asymptote** Nous allons montrer que la courbe $\begin{cases} x(t) = \int_0^t \cos(u^2)\mathrm{d}u \\ y(t) = \int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u \end{cases}$ possède un point asymptote en $+\infty$.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & i\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\mathrm{d}t + \left(\int_0^x e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 \end{cases}$

(a) Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Calculer F'. Conclusion ?
Indication : effectuer le changement de variable $u = xt$ sur la bonne intégrale pour le calcul de F'.

(b) On pose $G : A \mapsto \displaystyle\int_0^A e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$. Montrer que G admet une limite complexe en $+\infty$.

(c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^2\,e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
Indication : effectuer une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 2t\,e^{\mathrm{i}x^2t^2}$.

(d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

(e) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$ en admettant que ses parties réelles et imaginaires sont positives.

(f) Conclure pour notre courbe paramétrée, puis pour celle de la question 1.

II Enveloppes

Exercice 5
Une échelle de longueur ℓ est placée contre un mur. Si l'on fait glisser le pied de l'échelle sur le plan horizontal, elle prend dans l'espace différentes positions dont nous cherchons l'enveloppe.

1. On note A le point de contact au sol et B le point de contact au mur. Dans un repère à préciser, donner une paramétrisation des coordonnées de (AB).
2. Déterminer l'enveloppe des droites (AB)

Exercice 6
On considère le cercle unité centré en O noté $\mathcal{C}$ ainsi qu'une source lumineuse au point S de coordonnées $(-1, 0)$.

1. Soit $t \in]-\pi, \pi[$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_t$ portant la réflexion d'un rayon lumineux arrivant sur le cercle en $A(t)$.
2. Donner une paramétrisation de l'enveloppe des droites $(\mathcal{D}_t)_{t \in]-\pi,\pi[}$ et tracer.

Exercice 7
On considère deux points P, Q parcourant le cercle unité à des vitesses angulaires respectives de 1 et $\omega \neq \pm 1$. Calculer une représentation paramétrique de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t = (P(t)Q(t))$. On pourra utiliser les nombres complexes.
Tracer pour $\omega = 3$.

Exercice 8
On considère la demi-hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et $x \geqslant 0$. On paramétrise par $f : t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(t) \\ \mathrm{sh}(t) \end{pmatrix}$ Calculer la développée en tant qu'enveloppe des normales.