I Frenet, courbure

Exercice 1 (Application simple de la définition)

On considère la courbe $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Calculer la longueur de la courbe entre les instants 0 et $a \in \mathbb{R}$ fixé.

Correction :
f est clairement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Par définition, la longueur cherchée est $\ell = \displaystyle\int_0^a \|f'(t)\|\mathrm{d}t$. Or $\|f'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4}$ pour tout t. Ainsi

$$\ell = \int_0^a |t|\sqrt{4+9t^2}$$

Si $a \geqslant 0$, on a $\ell = \frac{1}{18} \times \frac{2}{3}\displaystyle\int_0^a \frac{3}{2} \times 18t\sqrt{4+9t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{27}\left[(4+9t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$ et donc

$$\ell = \frac{(4+9a^2)^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}}}{27}$$

Si $a < 0$, le calcul est le même main $|t| = -t$ et on trouve l'opposé pour ℓ.

Exercice 2
Donner la longueur du support de la courbe

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix} = (1+\cos(t))\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Bonus : Donner en fonction de t le module et un argument de l'affixe du point $M(t)$.

Correction :
Éléments de solution.
f bien dérivable. Alors $\|f'(t)\|^2 = (-\sin(t)-\sin(2t))^2 + (\cos(t)+\cos(2t))^2 = 2+2\cos(2t-t) = 2(1+\cos(t)) = 4\cos^2\frac{t}{2}$
On intègre sur $[-\pi, \pi]$ où $\cos(\frac{t}{2}) \geqslant 0$.
Ici t est un argument et le module vaut $1+\cos(t)$. On repère plutôt le point $M(t)$ par angle et distance (coordonnées polaires).

Exercice 3
On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos(t)) \end{pmatrix}$ dont le support est la courbe d'équation $y = \ln(\cos(x))$.

1. Donner l'ensemble de définition ainsi qu'un ensemble d'étude de f.
2. Calculer en chaque point régulier le repère de Frenet.
3. Calculer la courbure en tout point régulier.
4. En déduire une expression de la courbe développée.

Correction :

1. f est définie en tout t tel que $\cos(t) > 0$ et donc f est définie (et de classe $\mathcal{C}^\infty$ par composition) sur $E = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi[$.
   De plus, pour $t \in E$, $t+2\pi \in E$ et $f(t+2\pi) = f(t) + \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$ s'obtient du point $f(t)$ par translation de vecteur $\begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$. On étudiera f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   Comme de plus, $f(-t)$ est le symétrique de $f(t)$ par rapport à (Oy), on peut étudier f seulement sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.
2. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$. $f'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-\sin(t)}{\cos(t)} \end{pmatrix}$ et $\|f'(t)\| = \sqrt{1+\left(\frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)}} = \frac{1}{\cos(t)}$ car $\cos(t) > 0$ et $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

Ainsi le repère de Frenet est donné par $\vec{T}(t) = \cos(t)f'(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix}$ et donc $\vec{N}(t) = \begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix}$.

3. On utilise la formule de Frenet. $\vec{T}$ est bien dérivable, et on a $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \cos(t)\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ -\cos(t)\end{pmatrix} = \gamma(t)\vec{N}(t)$. Ainsi $\gamma(t) = -\cos(t)$.
4. γ ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et par définition, le centre de courbure en $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ est le point
$$C(t) = f(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\vec{N}(t) = \begin{pmatrix}t\\ \ln(\cos(t))\end{pmatrix} - \frac{1}{\cos(t)}\begin{pmatrix}\sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t - \tan(t)\\ \ln(\cos(t)) - 1\end{pmatrix}$$
et la courbe développée est le lieu des centres de courbure. On vient d'en donner une paramétrisation.

Exercice 4

1. **Etude géométrique** Donner un paramétrage par l'abscisse curviligne de la courbe paramétrée vérifiant
$$\gamma(s) = s,\ M(0) = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$
ou encore, la courbure au point de paramètre s (l'abscisse curviligne d'origine 0) vaut s. On pourra utiliser le lien entre γ et α
Utilisation : cette courbe paramétrée est utilisée pour amorcer les virages après une ligne droite (voies ferroviaires, sortie d'autoroute) : le fait que la courbure augmente linéairement permet d'éviter l'à-coup que provoquerait le passage d'une ligne droite à un arc de cercle (penser force centrifuge et rayon).
2. **Point asymptote** Nous allons montrer que la courbe $\begin{cases} x(t) = \int\limits_0^t \cos(u^2)\mathrm{d}u \\ y(t) = \int\limits_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u \end{cases}$ possède un point asymptote en $+\infty$.

Soit $F : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & i\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\mathrm{d}t + \left(\int_0^x e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u\right)^2 \end{cases}$

(a) Montrer que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Calculer F'. Conclusion ?
Indication : effectuer le changement de variable $u = xt$ sur la bonne intégrale pour le calcul de F'.

(b) On pose $G : A \mapsto \displaystyle\int_0^A e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$. Montrer que G admet une limite complexe en $+\infty$.

(c) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^2\,e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.
Indication : effectuer une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 2t\,e^{\mathrm{i}x^2t^2}$.

(d) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{\mathrm{i}x^2t^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

(e) En déduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\mathrm{i}u^2}\,\mathrm{d}u$ en admettant que ses parties réelles et imaginaires sont positives.

(f) Conclure pour notre courbe paramétrée, puis pour celle de la question 1.

Correction :

1.
2. (a) La seconde intégrale est le carré d'une primitive.
Pour la classe $\mathcal{C}^1$ de l'intégrale à paramètre, les régularités sont évidentes, et on majore le module de l'intégrande par 1.
On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -2xe^{ix^2}\int_0^1 e^{ix^2t^2}\mathrm{d}t + 2e^{ix^2}\int_0^x e^{iu^2}\mathrm{d}u$
En posant $u = xt$ ($\mathcal{C}^1$ et bijectif dans le cas $x \neq 0$) dans la première intégrale, $F'(x) = -2e^{ix^2}\int_0^x e^{iu^2} + 2e^{ix^2}\int_0^x e^{iu^2}\mathrm{d}u = 0$.
Ainsi F est constante, égale à $F(0) = \frac{i\pi}{2}$.
(b) En posant $v = u^2$ ie $u = \sqrt{v}$ on obtient $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{v}}\mathrm{d}v$ et $G(A) = \int_0^{A^2} \frac{e^{iv}}{2\sqrt{v}}\mathrm{d}v$.

Une intégration par partie sur $[1, A^2[$ comme dans le cours (ou le DM, voir l'intégrale de $\frac{\sin t}{t}$), montre que les parties réelles et imaginaires sont des intégrales convergentes quand $A \to +\infty$. Donc $G(A)$ possède une limite en $+\infty$.

(c) On prend $x > 0$. Une primitive de $t \mapsto 2te^{ix^2t^2}$ est $t \mapsto \frac{1}{ix^2}e^{ix^2t^2}$ (qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$).
De plus $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ de dérivée $t \mapsto \frac{t^2+1-2t^2}{(t^2+1)^2}$ et l'intégration par parties donne :

$$\int_0^1 \frac{t^2e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{t^2+1}\frac{1}{2ix^2}e^{ix^2t^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2ix^2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)e^{ix^2t^2}}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$$

Le module de l'intégrande étant $\leqslant 1$, on obtient par inégalité triangulaire :

$$\left|\int_0^1 \frac{t^2e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x^2}$$

et la limite cherchée vaut 0 par encadrement.

(d) On prend toujours $x > 0$. On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(t^2+1)e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{ix^2t^2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
En posant $u = xt$ dans la première intégrale on obtient $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x e^{iu^2}\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{t^2e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{ix^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ par produit (G possède une limite finie) et somme.

(e) On sait que $\forall x > 0$ $F(x) = \frac{i\pi}{4}$. D'après le calcul précédent,

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0 + \left(\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\mathrm{d}u\right)^2$$

. En notant $I = a + ib$ l'intégrale cherchée, on a donc $I^2 = \frac{i\pi}{2} = (a + ib)^2$ avec $a, b \geqslant 0$.
Alors $a^2 - b^2 = 0$ ie $a = b$ et en passant au module $a^2 + b^2 = \frac{\pi}{4}$ et donc $a = b = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

II Enveloppes

Exercice 5
Une échelle de longueur ℓ est placée contre un mur. Si l'on fait glisser le pied de l'échelle sur le plan horizontal, elle prend dans l'espace différentes positions dont nous cherchons l'enveloppe.

1. On note A le point de contact au sol et B le point de contact au mur. Dans un repère à préciser, donner une paramétrisation des coordonnées de (AB).
2. Déterminer l'enveloppe des droites (AB)

Correction :

1. On se place dans le repère dont l'axe des abscisses est le sol et l'axe des ordonnées le mur. On suppose que l'échelle est à droite.
Notons $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ le point de contact avec le sol et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ le point de contact avec le mur. Alors $a^2 + b^2 = \ell^2$
On peut poser $t = a$ et $b = \sqrt{\ell^2 - a^2}$ pour $t \in [0, \ell]$ ou alors $a = l\cos(t)$ et $b = l\sin(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, au choix.
2. — Méthode 1 : on pose $a = l\cos(t)$ et $b = l\sin(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Alors (AB) passe par $A = \begin{pmatrix} l\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.
On note $f : t \mapsto M(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'enveloppe cherchée. Remarquons que A et $\vec{u}$ sont dérivables par rapport à t. On cherche une fonction λ telle que $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ et $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

On a $\begin{vmatrix} -l\sin(t)+\lambda(t)\sin(t) & -\cos(t) \\ \lambda(t)\cos(t) & \sin(t) \end{vmatrix} = 0$ ie $\lambda(t) = l\sin^2(t)$.

Ainsi $M(t) = \begin{pmatrix} l\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} + l\sin^2(t)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} \cos(t)(1-\sin^2(t)) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix} = l\begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}$.

— Méthode 2 : On pose $t = a$ et alors $b = \sqrt{l^2-t^2}$, pour $t \in [0,l]$.

Alors (AB) passe par $A(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{l^2-t^2} \end{pmatrix}$ qui sont dérivables sur $[0,l[$.

Avec les mêmes notations que pour la méthode 1 on obtient, pour $t \in [0,l[$,

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda(t) & -t \\ \lambda(t)\times\frac{-t}{\sqrt{l^2-t^2}} & \sqrt{l^2-t^2} \end{vmatrix} = 0 \iff \sqrt{l^2-t^2} - \lambda(t)\left(\sqrt{l^2-t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{l^2-t^2}}\right) = 0$$

ou encore $\lambda(t) = 1 - \frac{t^2}{l^2}$.

Ainsi $M(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\frac{t^2}{l^2})\begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{l^2-t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^3}{l^2} \\ \frac{(l^2-t^2)^{\frac{3}{2}}}{l^2} \end{pmatrix}$ qui est prolongeable par continuité en l.

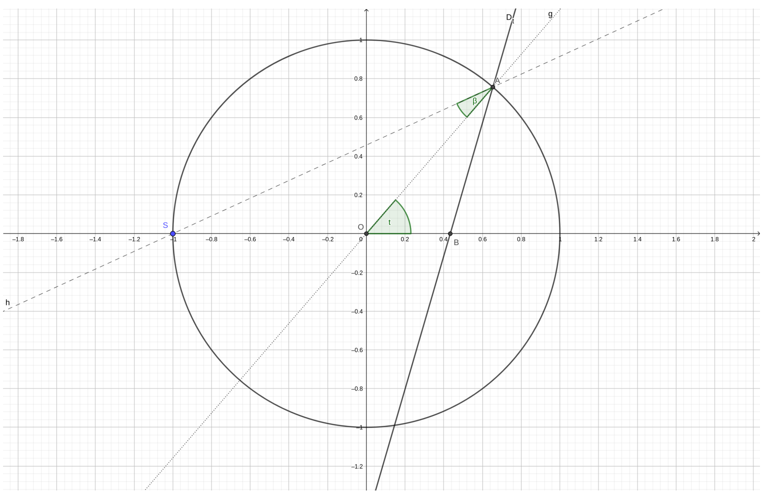
Exercice 6

On considère le cercle unité centré en O noté $\mathcal{C}$ ainsi qu'une source lumineuse au point S de coordonnées $(-1,0)$.

1. Soit $t \in]-\pi,\pi[$ et $A(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$. Donner un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_t$ portant la réflexion d'un rayon lumineux arrivant sur le cercle en $A(t)$.
2. Donner une paramétrisation de l'enveloppe des droites $(\mathcal{D}_t)_{t\in]-\pi,\pi[}$ et tracer.

Correction :

1. Commençons par un schéma.



Le triangle SOA est isocèle en O en donc $2\beta + (\pi - t) = \pi$ ie $\beta = \frac{t}{2}$.

De plus, par construction, $\mathcal{D}_t$ est symétrique de (SA) par rapport à la normale issue de A et donc l'angle $\widehat{OAB}$ vaut β également. Ainsi, $\widehat{ABO} = \pi - \frac{3t}{2}$ et donc l'angle non orienté entre (Ox) et $(AB) = \mathcal{D}_t$ vaut $\frac{3t}{2}$. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_t$ est $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} \cos\frac{3t}{2} \\ \sin\frac{3t}{2} \end{pmatrix}$.

2. Remarquons que A et $\vec{u}$ définissent des fonctions dérivables sur $]-\pi,\pi[$.

On cherche la courbe développée sous forme $M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est à trouver pour que $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$ ou encore

$$\begin{vmatrix} -\sin(t) - \frac{3}{2}\lambda(t)\sin\frac{3t}{2} & \cos\frac{3t}{2} \\ \cos(t) + \frac{3}{2}\lambda(t)\cos\frac{3t}{2} & \sin\frac{3t}{2} \end{vmatrix} = 0 \iff -\sin(t)\sin\frac{3t}{2} - \cos(t)\cos\frac{3t}{2} - \frac{3}{2}\lambda(t) = 0$$

On a donc $\lambda(t) = -\frac{2}{3}\cos\frac{t}{2}$

Ainsi $M(t) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix} - \frac{2}{3}\cos\frac{t}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{3t}{2}\\ \sin\frac{3t}{2}\end{pmatrix}$.
En utilisant les formules $2\cos a\cos b = \cos(a+b)+\cos(a-b)$ et $2\cos a\sin b = \sin(a+b)-\sin(a-b)$, on trouve

$$M(t) = \begin{pmatrix}\cos(t) - \frac{1}{3}(\cos(2t)+\cos(t))\\ \sin(t) - \frac{1}{3}(\sin(2t)-\sin(t))\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\cos(t)-\cos(2t)\\ 2\sin(t)-\sin(2t)\end{pmatrix}$$

Exercice 7
On considère deux points P, Q parcourant le cercle unité à des vitesses angulaires respectives de 1 et $\omega \neq \pm 1$. Calculer une représentation paramétrique de l'enveloppe des droites $\mathcal{D}_t = (P(t)Q(t))$. On pourra utiliser les nombres complexes.
Tracer pour $\omega = 3$.

Correction :
On pose $P = \begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}$ d'affixe complexe $p(t) = e^{it}$ et $Q = \begin{pmatrix}\cos(\omega t)\\ \sin(\omega t)\end{pmatrix}$ d'affixe complexe $q(t) = e^{i\omega t}$, pour $t \in \mathbb{R}$.
Notons également $z(t) = q(t) - p(t)$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Alors $z = e^{i\omega t} - e^{it} = 2i\sin(\frac{\omega-1}{2}t)e^{i\frac{\omega+1}{2}t}$
Lorsque $z(t) \neq 0$, $\overrightarrow{PQ}$ dirige la droite $\mathcal{D}_t = (PQ)$, qui passe par P.
Rappelons que pour deux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ d'affixes respectives u, v, on a $[\vec{u}, \vec{v}] = \mathrm{Im}(\bar{u}v)$.
On cherche l'enveloppe sous forme complexe, $m(t) = p(t) + \lambda(t)z(t)$ où λ est une fonction à valeurs réelles et telle que $\mathrm{Im}(\overline{p'(t)+\lambda(t)z'(t)}z(t)) = 0$.
Or $p'(t) + \lambda(t)z'(t) = ie^{it} + \lambda(t)\times(i\omega e^{i\omega t} - ie^{it})$ Ainsi

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(\overline{p'(t)+\lambda(t)z'(t)}z(t)) &= \mathrm{Im}((-ie^{-it} + \lambda(t)(-i\omega e^{-i\omega t} + ie^{-it}))(e^{i\omega t} - e^{it}))\\ &= \mathrm{Im}\left(-ie^{i(\omega-1)t} + i + \lambda(t)(-i\omega + i\omega e^{i(-\omega+1)t} + ie^{i(\omega-1)t} - i)\right)\\ &= -\cos((\omega-1)t) + 1 + \lambda(t)\left(-\omega - 1 + \omega\cos((-\omega+1)t) + \cos((\omega-1)t)\right)\\ &= -\cos((\omega-1)t) + 1 + \lambda(t)(1+\omega)(-1+\cos((\omega-1)t))\end{aligned}$$

Lorsque $\cos((\omega-1)t) \neq 1$ (ie, après analyse de la situation, $z \neq 0$), on obtient $\lambda(t) = \frac{1}{\omega+1}$ qui est indépendant de t.
Alors $m(t) = e^{it} + \frac{1}{1+\omega}(e^{i\omega t} - e^{it}) = \frac{\omega}{1+\omega}e^{it} + \frac{1}{1+\omega}e^{i\omega t}$.
Dans le cas $\omega = 3$, on obtient $m(t) = \frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4}e^{3it}$ et la courbe à étudier est donc paramétrée par $f : t \mapsto \frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\cos(t)+\cos(3t)\\ 3\sin(t)+\sin(3t)\end{pmatrix}$

Exercice 8
On considère la demi-hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ et $x \geqslant 0$. On paramétrise par $f : t \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t)\\ \mathrm{sh}(t)\end{pmatrix}$ Calculer la développée en tant qu'enveloppe des normales.

Correction :
La courbe est $\mathcal{C}^2$, de dérivée $t \mapsto \begin{pmatrix}\mathrm{sh}(t)\\ \mathrm{ch}(t)\end{pmatrix}$ qui ne s'annule pas : c'est une courbe régulière.
De plus, un vecteur normal à l'instant t est $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix}-\mathrm{ch}(t)\\ \mathrm{sh}(t)\end{pmatrix}$ et la normale passe par $A(t) = \begin{pmatrix}\mathrm{ch}(t)\\ \mathrm{sh}(t)\end{pmatrix}$.
On chercher une courbe $t \mapsto M(t) = A(t) + \lambda(t)\vec{u}(t)$ où λ est à déterminer sachant que $[A'(t) + \lambda(t)\vec{u}'(t), \vec{u}(t)] = 0$.
Ainsi $\begin{pmatrix}\mathrm{sh}(t) - \lambda(t)\,\mathrm{sh}(t) & -\mathrm{ch}(t)\\ \mathrm{ch}(t) + \lambda(t)\,\mathrm{ch}(t) & \mathrm{sh}(t)\end{pmatrix} = 0$ ie $\mathrm{ch}(t)^2 + \mathrm{sh}(t)^2 + (\mathrm{ch}(t)^2 + \mathrm{sh}(t)^2)\lambda(t) = 1$ et donc $\lambda(t) = -\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t)$.
On en déduit la courbe cherchée qui est l'enveloppe des normales de f et donc sa courbe développée.