

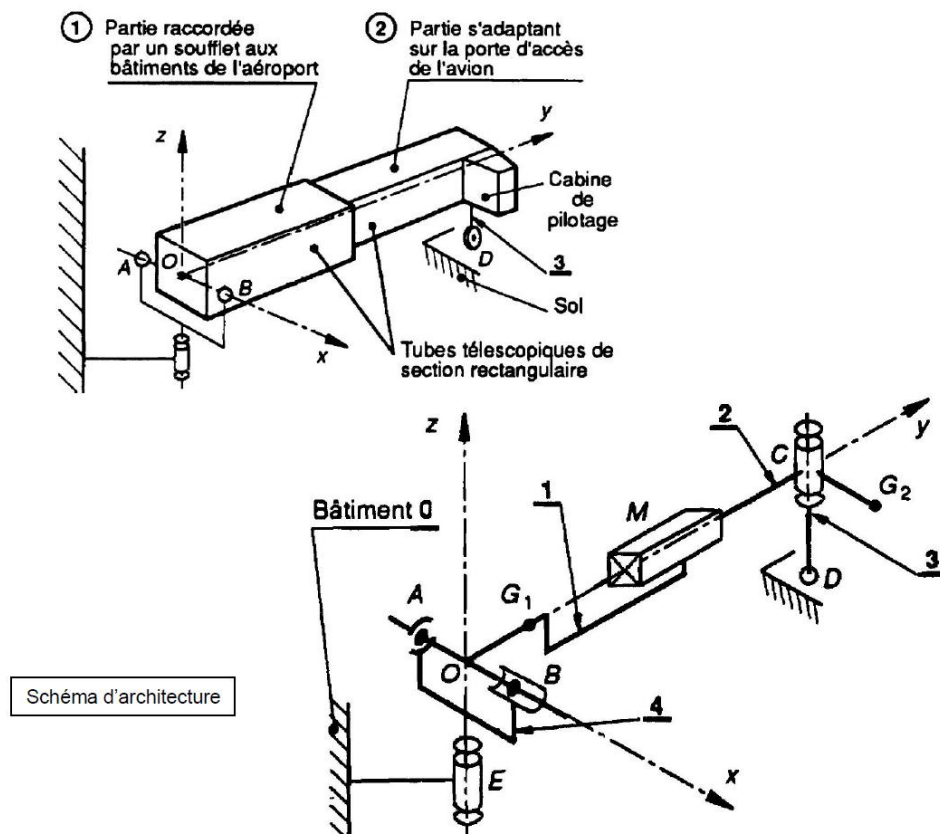
L'objectif de ce TD est d'implémenter l'algorithme du pivot de Gauss afin de solutionner un problème de Statique en SII.

I. Mise en situation

Cet exercice, qui sera traité cette année en TD de SII, a pour objectif de connaître toutes les inconnues d'actions mécaniques de liaison dans les liaisons entre les constituants d'une passerelle télescopique d'aéroport. La connaissance de ces actions mécaniques entre composants permettrait par la suite de dimensionner les composants pour éviter toute casse ou usure prématurée face aux efforts qu'ils subissent lors de l'utilisation.



Le schéma cinématique de la passerelle est donné, ainsi que les masses et longueurs des différents composants.

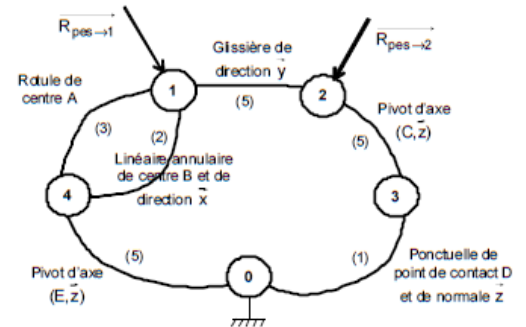


Il y a en tout 21 inconnues d'actions mécaniques de liaison recherchées dans la passerelle télescopique d'aéroport :

$$\{T_{0 \rightarrow 4}\} = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow 4} & L_{E,0 \rightarrow 4} \\ Y_{0 \rightarrow 4} & M_{E,0 \rightarrow 4} \\ Z_{0 \rightarrow 4} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \{T_{0 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{0 \rightarrow 3} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \forall P \in (D, \bar{z})$$

$$\{T_{1 \rightarrow 4}^{LA}\} = \begin{Bmatrix} X_{1 \rightarrow 4}^{LA} & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 4}^{LA} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 4}^{LA} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \{T_{1 \rightarrow 4}^{LB}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow 4}^{LB} & 0 \\ Z_{1 \rightarrow 4}^{LB} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{2 \rightarrow 1} & L_{M,2 \rightarrow 1} \\ 0 & M_{M,2 \rightarrow 1} \\ Z_{2 \rightarrow 1} & N_{M,2 \rightarrow 1} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_{2 \rightarrow 3} & L_{C,2 \rightarrow 3} \\ Y_{2 \rightarrow 3} & M_{C,2 \rightarrow 3} \\ Z_{2 \rightarrow 3} & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$



L'application du Principe Fondamental de la Statique aux ensembles de solides $\{1,2,3,4\}$, $\{4\}$, $\{1,4\}$ et $\{3\}$ permet d'obtenir 21 équations reliant les inconnues (et 3 équations inutiles du type $0=0$) :

$$\begin{cases} X_{0 \rightarrow 4} = 0 \\ Y_{0 \rightarrow 4} = 0 \\ Z_{0 \rightarrow 4} + Z_{0 \rightarrow 3} - m_1 \cdot g - m_2 \cdot g = 0 \\ L_{E,0 \rightarrow 4} + y_0 \cdot Z_{0 \rightarrow 3} - d \cdot m_1 \cdot g - y_0 \cdot m_2 \cdot g = 0 \\ M_{E,0 \rightarrow 4} + e \cdot m_2 \cdot g = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{1 \rightarrow 4}^{LA} = 0 \\ Y_{1 \rightarrow 4}^{LA} + Y_{1 \rightarrow 4}^{LB} = 0 \\ Z_{1 \rightarrow 4}^{LA} + Z_{0 \rightarrow 4} + Z_{1 \rightarrow 4}^{LB} = 0 \\ L_{E,0 \rightarrow 4} = 0 \\ -e \cdot m_2 \cdot g - 2 \cdot a \cdot Z_{1 \rightarrow 4}^{LB} - a \cdot Z_{0 \rightarrow 4} = 0 \\ 2 \cdot a \cdot Y_{1 \rightarrow 4}^{LB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_{2 \rightarrow 1} = 0 \\ 0 = 0 \\ Z_{2 \rightarrow 1} + \frac{(y_0 - d) \cdot m_1 \cdot g}{y_0} - m_1 \cdot g = 0 \\ L_{M,2 \rightarrow 1} - l \cdot \frac{(y_0 - d) \cdot m_1 \cdot g}{y_0} + (l - d) \cdot m_1 \cdot g = 0 \\ M_{M,2 \rightarrow 1} - e \cdot m_2 \cdot g = 0 \\ N_{M,2 \rightarrow 1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} X_{2 \rightarrow 3} = 0 \\ Y_{2 \rightarrow 3} = 0 \\ Z_{2 \rightarrow 3} + \frac{d \cdot m_1 \cdot g + y_0 \cdot m_2 \cdot g}{y_0} = 0 \\ L_{C,2 \rightarrow 3} = 0 \\ M_{C,2 \rightarrow 3} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Remarque : On prendra $g=9.81 \text{ m/s}^2$. Les masses et les longueurs caractéristiques du système sont connues :

$$\begin{aligned} y_0 &= 16 \text{ m} \\ d &= 6 \text{ m} \\ a &= 1,5 \text{ m} \\ e &= 1 \text{ m} \\ h &= 3 \text{ m} \\ \ell &= 7 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= 10^4 \text{ kg} \\ m_2 &= 15 \cdot 10^3 \text{ kg} \end{aligned}$$

Objectif du TD d'informatique : On souhaite résoudre numériquement le système linéaire obtenu de 21 équations pour déterminer les 21 inconnues d'actions mécaniques du système.

II.Méthode du Pivot de Gauss de résolution d'un système linéaire

Afin de résoudre le système linéaire de 21 équations à 21 inconnues, on se propose ici de programmer la méthode dite du Pivot de Gauss de résolution d'un système linéaire.

a. Définition des matrices de départ

On considère au départ un système linéaire de n équations à n inconnues (S) suivant :

$$(S): \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

La matrice A du système, le vecteur inconnu et le vecteur B second membre du système (S) sont définis par :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

L'écriture matricielle du système est : $AX = B$

Pour la passerelle télescopique d'aéroport, les matrices A et B de départ sont données dans le fichier python « pivot_gauss.py » présent sur le réseau et ont été construites grâce au système de 21 équations à 21 inconnues, compilé dans le tableau suivant :

X04	Y04	Z04	L04	MO4	Z03	XA14	YA14	ZA14	YB14	ZB14	X21	Z21	L21	M21	N21	X23	Y23	Z23	L23	M23	2nd terme B
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	245250
0	0	0	1	0	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2943000
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-147150
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	-3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	147150
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	36788
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	331088
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	147150
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-183938
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Rappel: on écrit une matrice par une liste de liste : $A = [[, , ,], [, , ,], [, , , ,]]$ où chaque sous liste est une ligne de A (elles ont donc toutes la même longueur). Pour accéder à la ligne i on peut donc directement accéder à $A[i]$. Pour avoir accès au coefficient d'indice (i; j) on peut donc taper $A[i][j]$.