

Révisions

Exercice 1

1. Trouver une base de $P : x - 2y + z = 0$.

2. Donner un système d'équation de la droite $D = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On pose $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1), w = (1, 1, 1)$. Donner une base, la dimension et un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

Exercice 3

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto P - (1 - X)P' \end{cases}$. Montrer que f est linéaire et donner des bases de $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 4

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Exercice 5

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f \circ g = 0$ ssi $\text{Im}(g) \subset \ker(f)$.

Manipulations d'espaces

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , et F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Montrer : $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 7

Vrai ou Faux ?

Soit E un \mathbb{R} -e.v. (non nécessairement de dimension finie), et f et g deux endomorphismes de E .

- $f \circ f = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
- $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}g$.
- $\text{Im}g \subset \text{Im}(g \circ f)$.
- $\ker(g \circ f) \subset \ker f$.
- $\ker f \subset \ker(g \circ f)$.

6. $\text{Im} f \subset \ker f \Leftrightarrow f^2 = 0$.

7. $\text{Im} f \cap \ker f = f(\ker f^2)$.

8. Si f est injective, alors f est bijective.

9. $f(\ker(g \circ f)) = \ker g \cap \text{Im} f$.

Familles libres et génératrices

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme non nul de E (espace de dimension n). On suppose qu'il existe p tel que $f^p = 0$ et on prend p le plus petit possible.

- Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- Montrer que $f^n = 0$.

Exercice 9

1. Montrer que pour $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$, $\int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-int} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

2. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on définit une fonction f_k de \mathbb{R} dans \mathbb{C} en posant $f_k(t) = e^{ikt}$, $t \in \mathbb{R}$.

Soit $p < n$ dans \mathbb{Z} , montrer que (f_p, \dots, f_n) est libre dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $c_k(t) = \cos kt$ et $s_k(t) = \sin kt$, $t \in \mathbb{R}$.

Déduire de la question précédente que $(c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ forme une famille libre.

Exercice 10

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ linéaire

On suppose qu'il existe une famille génératrice de E .

- Montrer que f est injective si et seulement si f transforme toute famille libre de E en une famille libre de F
- Montrer que f est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de E transformée par f en une famille génératrice de F

Exercice 11

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que

pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est une famille liée.

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E .

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. En considérant $e_i + e_j$, montrer que $\lambda_i = \lambda_j$ pour $i \neq j$.

3. Donner l'ensemble des endomorphismes u vérifiant la propriété de l'énoncé.

4. Quels sont les matrices $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres matrices ?

Sommes directes

Exercice 12

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension finie $n \geq 1$, et F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension.

Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F_1 \oplus G = F_2 \oplus G$

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $F_1 = \ker(f)$, $F_2 = \ker(f - Id_E)$, $F_3 = \ker(f - 2Id_E)$.

1. Montrer que l'on a la somme directe $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$
2. On suppose maintenant que $f^3 - 3f^2 - 2f = 0$. Montrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.
3. En notant r_i la dimension de F_i , donner la matrice de f dans une base adaptée à la somme précédente.

Projections

Exercice 14

On se place dans \mathbb{R}^2 . On pose $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique et $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $D_u = \text{Vect}(u)$ et $D_v = \text{Vect}(v)$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
2. On note p le projecteur sur D_u parallèlement à D_v et s la symétrie associée. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, calculer $p \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et en déduire la matrice de p dans \mathcal{B} . Même question pour s
3. Calculer les matrices de p et s dans $\mathcal{B}' = (u, v)$

Exercice 15

Soient E, F 2 \mathbb{K} -ev. Soient de plus $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ telles que $u \circ v = Id_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques (projecteur sur quel espace, parallèlement à quel autre?).

Matrices

Exercice 16

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que

$\mathcal{B} = (u, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de \mathbb{R}^2 et calculer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Calculer rapidement $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.

Exercice 17

Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

Exercice 18

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par $a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n)$ l'application canoniquement associée à A .

1. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\varphi(P)$.
2. En déduire les coefficients de A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Même question avec $k = -1$ (que faut-il prouver avant?) puis $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 19

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.

1. Calculer A^2 . Qu'en déduire pour f ?
2. Donner une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$ puis la matrice de f dans une base adaptée à $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.