Devoir maison n°1

A rendre le 28/09

Exercice 1

Partie I, un exemple

Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 2$.
2. Déterminer en fonction des vecteurs de $\mathcal{B}$ une base de $\ker(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$. Que remarquez-vous sur ces espaces ?
3. Déterminer f^2.
4. Montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$.
5. Déterminer la matrice de f dans une base $\mathcal{B}'$ adaptée à la somme directe précédente.

Cas général

1. Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
   (a) Montrer que n est un entier pair et déterminer le rang de f en fonction de n.
   (b) Montrer que $\forall x \in E\ (f \circ f)(x) = 0_E$.
2. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^2 = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(f)$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$.
   (b) En déduire $\mathrm{Im}(f) = \ker(f)$.
3. On se place maintenant dans un des deux cas précédents qui sont équivalents. On a donc $f^2 = 0$ et $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$.
   On pose F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E et on note $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F.
   (a) Que vaut r ?
   (b) Montrer que $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) On pose alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots e_{2r})$ où $e_{r+i} = f(e_i)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$. Justifier que $\mathcal{B}$ est une base de E et calculer $f(e_k)$ pour $k \in [\![r+1, 2r]\!]$.
   (d) Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.