Table des matières

I Séries convergentes **1**
- I.1 Vocabulaire . . . 1
- I.2 Séries de référence . . . 1
- I.3 Séries à termes positifs . . . 1
- I.4 Application à l'étude de suites . . . 1

II Convergence absolue **2**
- II.1 Convergence d'une série complexe . . . 2
- II.2 Propriétés . . . 2
- II.3 Approximations et restes . . . 2

I Séries convergentes

I.1 Vocabulaire

Définition 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ la **suite** (S_N) définie par
$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$
On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.
Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.
2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.
Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.
3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

Définition-Proposition 1
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
SI $u_n \nrightarrow 0$ **ALORS** $\sum u_n$ diverge.
Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Proposition 1
Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge.
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur $\sum(u_n + v_n)$.

I.2 Séries de référence

I.3 Séries à termes positifs

Théorème 1
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\left(\left\{\sum\limits_{k=0}^{N} u_n |\ N \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

Théorème 2 (Comparaison des séries à termes positifs)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels positifs.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Les résultats 2, 3 et 4 restent vrais pour des séries à termes tous négatifs.

Théorème 3 (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ la série peut être divergente ou convergente.

I.4 Application à l'étude de suites

Proposition 2
Soit $(u_n)_n$ une suite. $(u_n - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

II Convergence absolue

II.1 Convergence d'une série complexe

Définition 2
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum\limits_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Théorème 4
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

II.2 Propriétés

Proposition 3
Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geqslant 0$.

1. Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 5
Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

II.3 Approximations et restes