Table des matières

I Séries convergentes

I.1 Vocabulaire

I.1.1 Définition

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite.

1. On appelle série de terme général u_n et on note $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ la **suite** (S_N) définie par

$$\forall N \in \mathbb{N}\ S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

   On dit que S_N (le nombre) est la Nième somme partielle de cette série.

   Il est possible de commencer à sommer non pas à l'indice 0 mais à un indice entier fixé n_0 (ce qui revient à poser $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, n_0 - 1]\!]$). Dans ce cas la série est notée $\sum\limits_{n \geqslant n_0} u_n$.

2. On dit que la série $\sum u_n$ converge ssi la suite des somme partielles converge. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge. Sa **nature** est d'être convergente ou divergente.

   Quand elle existe, on note $S = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ la limite des sommes partielles et on l'appelle somme de la série.

3. Dans le cas d'une série convergente, la suite des restes de la série est la suite définie par $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n = S - S_N$

I.1.2 Complexes

Comme d'habitude, il est suffisant d'étudier les séries des parties réelles et imaginaires $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

I.1.3 Modifier une série

On ne change pas la nature convergente ou divergente d'une série en modifiant les k premières valeurs de u_n pour un k fixé. Par contre on modifie la valeur de la somme...

I.1.4 Définition-Proposition

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

SI $u_n \nrightarrow 0$ **ALORS** $\sum u_n$ diverge.

Dans ce cas on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

I.1.5 Utilisation

Ce résultat n'a qu'une seule utilité : prouver qu'une suite diverge. La contraposée est : si $\sum u_n$ converge alors $u_n \to 0$.

Exemple : montrer que $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ diverge.

I.1.6 Proposition

Considérons 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}\ \sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge.

— Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

— Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire sur $\sum (u_n + v_n)$.

I.2 Séries de référence

I.2.1 Séries convergentes

1. Soit $q \in \mathbb{C}$. $\sum q^n$ converge ssi $|q| < 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

I.2.2 Série divergente

La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série divergente appelée série harmonique.

I.2.3 Séries télescopiques

Exemple : Calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

I.2.4 Taylor

Soit $x \in \mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'ordre n à exp entre 0 et x (exp est de classe $n+1$ sur ce segment) donne

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$$

Ainsi $\left|e^x - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \frac{1}{n!} \left|\int\limits_0^x |(x-t)^n e^t| \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{n!} \left|\int\limits_0^x |x|^n e^t \mathrm{d}t\right| = \frac{|x|^n (e^x - 1)}{n!}$.

Par croissances comparées, $\frac{|x|^n}{n!} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

I.3 Séries à termes positifs

I.3.1 Théorème
Soit $(u_n)_n$ une suite de réels **positifs**. $\sum u_n$ converge ssi la suite des sommes partielles est majorée.

Dans ce cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup\left(\left\{\sum\limits_{k=0}^{N} u_n \middle|\ N \in \mathbb{N}\right\}\right)$.

I.3.2 Remarque

Ce théorème est fondamental pour la compréhension et l'intuition des séries à termes positifs convergentes. Le terme général ne pas pas “être trop grand”.

I.3.3 Théorème (Comparaison des séries à termes positifs)
Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ des suites de réels positifs.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
4. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Les résultats 2, 3 et 4 restent vrais pour des séries à termes tous négatifs.

I.3.4 Exemple

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^n}$ converge.
2. $\sum \frac{n+3}{n^3 - n}$

I.3.5 $n^\alpha u_n$

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs et $\alpha > 1$

1. Si on a $n^\alpha u_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ alors $\sum u_n$ converge.

   On a en effet $u_n = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ dans ce cas.
2. Si on a $n^\alpha u_n \underset{+\infty}{\to} \ell \neq 0$ alors $\sum u_n$ converge car $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n^\alpha}$ qui est un terme général de signe constant d'une série convergente.

I.3.6 Attention

L'hypothèse $(u_n), (v_n)$ positives est fondamentale. On peut avoir $u_n \sim v_n$, $\sum v_n$ converge et $\sum u_n$ diverge si elle n'est pas respectée.

Pour $n > 1$, posons $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}, v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ car $(-1)^n = o_{+\infty}(\sqrt{n})$ (comparaison d'une suite bornée à une suite de limite infinie).
2. Montrons que $\sum v_n$ converge. Posons, pour $N > 1$, $a_N = \sum\limits_{n=2}^{2N} v_n$ et $b_N = \sum\limits_{n=0}^{2N+1} v_n$.

   Alors

   — $b_N - a_N = v_{2N+1} \underset{N \to +\infty}{\to} 0$

   — $a_{N+1} - a_N = -\frac{1}{\sqrt{2N+1}} + \frac{1}{\sqrt{2N+2}} \leqslant 0$ donc (a_N) est décroissante.

   — $b_{N+1} - b_N = \frac{1}{\sqrt{2N+2}} - \frac{1}{\sqrt{2N+3}} \geqslant 0$ donc (a_N) est croissante.

   Finalement, (a_N) et (b_N) sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $l \in \mathbb{R}$. Ainsi les sommes partielles de $\sum v_n$ convergent vers l (leurs suites des termes d'indice pairs et impairs le font).

3. De plus, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o_\infty(\frac{1}{n\sqrt{n}})$. Ainsi u_n est la somme de 3 termes généraux de séries convergentes et d'un terme général de série divergente de donc $\sum u_n$ diverge.

I.3.7 Divergence

Si on a (u_n) et (v_n) positives :

1. Si $u_n \leqslant v_n$ APCR et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.
2. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

I.3.8 Théorème (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > 0$. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$.

1. Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1$ la série peut être divergente ou convergente.

I.3.9 Utilisation

1. En général, le calcul de la limite du quotient n'est pas aisé, et en pratique vaut souvent 1...
2. Si l'expression de u_n fait apparaître des quantité $n!$ ou α^n en facteur, la règle de d'Alembert peut être efficace.

I.3.10 Exemple
Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge.

I.4 Application à l'étude de suites

I.4.1 Proposition
Soit $(u_n)_n$ une suite. $(u_n - u_0)_{n\in\mathbb{N}}$ à la même limite (ou absence de limite) que $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

I.4.2 Exemple
$u_n = \ln(\frac{n!e^n}{n^n})$. Convergence ?

I.4.3 Exemple
$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. Montrer que (u_n) converge en étudiant la convergence de $\sum (u_n - u_{n-1})$

II Convergence absolue

II.1 Convergence d'une série complexe

II.1.1 Définition
Soit $\sum u_n$ une série complexe. On dit que cette série est absolument convergente ssi $\sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge (prononcer module ou valeur absolue suivant les cas).

Explication On regarde en fait la convergence d'une série positive, pour laquelle tous les théorèmes précédent s'appliquent.

II.1.2 Théorème
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et on a

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve.
— Cas réel.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$. C'est à dire que u_n^+ est u_n si $u_n \geqslant 0$ et 0 sinon. u_n^- est $|u_n|$ si $u_n \leqslant 0$ et 0 sinon.
Ainsi ces deux nombres sont positifs et on a $u_n = u_n^+ - u_n^-, |u_n| = u_n^+ + u_n^-$.
On pose pour $N \in N$, $S_n = \sum_0^N u_n$ et $S'_n = \sum_0^N |u_n|$.
On sait que $S'_N \underset{+\infty}{\to} l \in \mathbb{R}^+$. Or $S'_N = \sum_0^N u_n^+ + \sum_0^N u_n^-$. Ces deux dernières sommes sont à termes positifs et majorées par l donc les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent.
Ainsi $\sum u_n$ converge par différence de série convergente.
— Cas complexe.
Cette fois on pose $u_n = x_n + iy_n$ et on sait que $\sum |x_n + iy_n|$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_n| \leqslant |u_n|$ et $|y_n| \leqslant |u_n|$ donc les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent absolument donc convergent par le point précédent.

Ainsi la combinaison linéaire $\sum x_n + iy_n$ converge. ■

II.1.3 Méthode obligatoire

Pour étudier une série complexe ou une série dont le signe n'est pas constant, on étudiera toujours d'abord la convergence absolue.

II.1.4 Exemple

Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!}$ converge.

II.1.5 Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ converge.

II.1.6 Attention

La réciproque est fausse. Par exemple la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, mais ne converge pas absolument.

Pour le voir, prenons $x \neq 1$ et notons que $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$. En intégrant sur $[-1,0]$ on obtient $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = ln(2) - \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x$. Or $0 \leqslant \frac{x^{n+1}}{1-x} \leqslant x^{n+1}$ et par croissance de l'intégrale $0 \leqslant \int\limits_{-1}^{0} \frac{x^{n+1}}{1-x}\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}$.

Finalement, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

II.2 Propriétés

II.2.1 Proposition

Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} v_n \geqslant 0$.

1. Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n = o_{+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

II.2.2 Théorème

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de complexes absolument convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors la série $\sum c_n$ converge absolument et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Preuve.

— On considère pour commencer que (a_n) et (b_n) sont des suite réelles positives.

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $A_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n, B_N = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n, C_N = \sum\limits_{n=0}^{N} c_n = \sum\limits_{n=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Posons de plus $A = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $B = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$

Alors $C_N = \sum\limits_{k=0}^{N}\sum\limits_{n=k}^{N} a_k b_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{N}\left(a_k \sum\limits_{i=0}^{N-k} b_i\right)$. Remarquons de plus que $A_N B_N = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k \sum\limits_{i=0}^{N} b_i$

Ainsi $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant AB$. La série $\sum c_n$, qui est une série de termes positifs, est majorée et donc converge. On note C sa somme.

Mais on a également

$$C_{2N} = \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) + \sum_{k=N+1}^{2N}\left(a_k \sum_{i=0}^{2N-k} b_i\right) \geqslant \sum_{k=0}^{N}\left(a_k \sum_{i=0}^{N} b_i\right) = A_N B_N$$

la majoration étant valable car on retranche des termes positifs.

Finalement, $C_N \leqslant A_N B_N \leqslant C_{2N}$ et par passage à la limite ($N \to +\infty$, les limites existent) on obtient bien $C = AB$.

— Revenons maintenant au cas général.

On note en plus, $c'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$, $A'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |a_n|, B'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |b_n|, C'_N = \sum\limits_{n=0}^{N} |c_n|$ et A', B', C' les sommes de ces 3 séries (A', B' existent par hypothèse, C' d'après le cas réel positif).

On a, d'après le point précédent, $A'_N B'_N - C'_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$.

De plus, $|C_N| \leqslant C'_N \leqslant C'$ par inégalité triangulaire et donc $\sum c_n$ converge absolument (série à termes positifs majorée) et on note encore C sa somme (l'existence de C n'est pas nécessaire à la suite du raisonnement).
D'après les calculs du premier point, $A_N B_N - C_N$ est une somme $\sum\limits_{(i,j)\in E} a_i b_j$ où $E \subset [\![0, N]\!]^2$ (qui représente les termes restant après simplification, ie. ceux qui n'apparaissent pas dans C_N), on a $|A_N B_N - C_N| \leqslant \sum\limits_{(i,j)\in E} |a_i b_j| = A'_N B'_N - C'_N$. Par encadrement, $A_N B_N - C_N \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ donc $C = AB$. ■

II.2.3 Exemple
Posons pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{C}\ f(a+b) = f(a)f(b)$.

II.3 Approximations et restes

II.3.1 Valeur approchée de la limite

Supposons que $\sum u_n$ converge vers S.

Alors pour $N \in \mathbb{N}$, $|S - S_N| = |R_N| = \left|\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right|$. Si on sait majorer les restes d'une série convergente, alors on connaît un minorant de la qualité de l'approximation ainsi que de la vitesse de convergence d'une suite.

II.3.2 Riemann

Soit $\alpha > 1$ un réel.

Montrons que $R_N = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{N^{\alpha-1}}$.

II.3.3 Séries géométries

On connaît une expression explicite du reste.

Si on a maintenant une suite vérifiant $|u_{n+1}| \leqslant k|u_n|$ pour un $k \in]0,1[$, montrons que $|R_N| \leqslant \frac{|u_{N+1}|}{1-k}$