Devoir surveillé n°2

Durée : 4H. Calculatrices interdites. **Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction et la propreté : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.**

Lisez l'énoncé attentivement et en entier **AVANT** de commencer chaque exercice.

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Etudier la nature des séries de terme général :

   (a) $u_n = \frac{n+\ln(n)}{2^n}$ (b) $u_n = \ln(n)^{-n}$.

2. Vrai ou faux ? Avec justification

   (a) $u_n = \frac{\ln(n)+\ln(\ln(n))}{n}$ vérifie $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$. Donc $u_n \underset{+\infty}{\to} 0$ et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

   (b) On pose $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La dimension de (u, v) est 2.

   (c) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n^n}$ est absolument convergente donc converge.

Exercice 2 (Autour des projecteurs)

Partie I

Dans cette partie, on traite deux exemples pratiques de projecteurs.

1. On considère la matrice $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, ainsi qu'un espace vectoriel E de dimension 2 munit d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$. Soit également $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M.

   (a) Montrer que f est un projecteur. Quel est son rang ?

   (b) Déterminer le noyau et l'image de f. Préciser leurs interprétations géométriques.

2. E est maintenant de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ en est une base. On note D la droite vectorielle engendrée par $u_1 = e_1 + 3e_2 - e_3$ et P le plan vectoriel engendré par $u_2 = e_1 - e_3$ et $u_3 = 2e_1 - e_2$.

   (a) Montrer que $D \oplus P = E$.

   (b) Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ du projecteur sur D parallèlement à P.

Partie II

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Soit également $p \in \mathcal{L}(E)$ telle que $p^2 = p$.

1. Montrer que $\ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p) = E$. On pourra remarquer que pour un $x \in E$, on a $x = (x - p(x)) + p(x)$.

2. Notons $q = Id_E - p$.

   (a) Montrer que q est un projecteur.

   (b) Déterminer le noyau et l'image de q.

   (c) Calculer $q \circ p$ et $p \circ q$.

3. Soient p_1, p_2 deux projecteurs de E vérifiant $p_1 \circ p_2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On pose alors $f = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

   (a) Montrer que f est un projecteur de E.

   (b) Montrer que $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) \subset \ker(f)$.

   (c) Montrer que $\ker(p_1) \cap \ker(p_2) = \ker(f)$.

Exercice 3 (Séries)

Partie I : le théorème

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $a_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (-1)^n a_n$. Le but de cette partie est de montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

On considère, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} u_n$

1. Etudier la monotonie des suites définies par $v_N = S_{2N}$ et $w_N = S_{2N+1}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(w_N)_{N\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

Partie II : quelques applications

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.
2. On souhaite étudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.
   (a) On pose $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ sur $]0, +\infty[$. Dresser un tableau de variations complet de f.
   (b) Conclure sur la convergence et l'absolue convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Partie III : calcul d'une somme

Dans cette partie, on souhaite calculer la somme de la série précédente, $\sum\limits_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$. Pour $n \geqslant 3$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k},\ t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \text{ et } a_n = t_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}$$

1. On pose, pour $n \geqslant 1$, $u_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$. Etudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite que l'on notera γ.
2. On souhaite utiliser la même technique pour montrer la convergence de (a_n).
   (a) Montrer que $(\ln(n))^2 - (\ln(n-1))^2 = 2\frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire un équivalent de $a_n - a_{n-1}$ quand $n \to +\infty$.
   (c) Montrer que la suite (a_n) converge.
3. Pour $n \geqslant 3$, montrer que $S_{2n} = t_n - t_{2n} + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \ln(2)$.
4. Déduire de la question précédente une expression de S_{2n} où figurent seulement a_n, a_{2n}, u_n (et des constantes).
5. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}$ en fonction de γ et déterminer $S = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 4

Ce problème est un extrait de sujet de concours, à peine reformulé.

Partie I

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -7 & -10 \\ 2 & -4 & 7 & 12 \\ -2 & 2 & -6 & -9 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. (a) Calculer $f(e_1), f^2(e_1)$.
   (b) Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est liée.

2. Montrer de même que la famille $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ est liée.
3. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
4. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, $f^2(x) - f(x) - 2x = 0$.
5. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. On pose $F = \text{Vect}(e_1, f(e_1))$ et $G = \text{Vect}(e_2, f(e_2))$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$ et que F et G sont stables par f.
7. Nous allons essayer de simplifier encore plus l'écriture d'une matrice de f, avec comme objectif une matrice diagonale à coefficients réels.

   Pour cela on pose $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on note $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ l'endomorphisme canoniquement associé à C.
   (a) Pour écrire la matrice de h dans une base $\mathcal{B}' = (u, v)$ de telle manière que $C' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$ soit diagonale à coefficients réels (α et β par exemple), que doivent vérifier les vecteurs $h(u)$ et $h(v)$?
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul $u \in \mathbb{R}^2$ tel que $h(u) = \alpha u$ ssi $h - \alpha Id$ n'est pas injective
   (c) Trouver tous les réels λ tels que $C - \lambda I_2 \notin GL_2(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer l'ensemble des vecteurs $u \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(u) = 2u$. On donnera la réponse sous forme $\text{Vect}(u_2)$ où $u_2 \in \mathbb{R}^2$ est à préciser
   (e) Même question avec l'équation $h(u) = -u$. On notera cette fois u_{-1} un vecteur directeur de l'ensemble des solutions.
   (f) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_2, u_{-1})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $C' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(h)$.
8. Trouver une base $\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}_G$ de G telles que la matrice de f dans $\mathcal{B}_E$, la concaténation de ces bases, soit diagonale.

Partie II

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On se place maintenant dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ et on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^d$.
Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^d$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} x_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

et on note $E_x = \text{Vect}(x_n, x \in \mathbb{N})$.

1. Montrer que E_x est stable par f.
2. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}^d$ contenant x et stable par f. Montrer que $E_x \subset F$.
3. Soit p le plus grand entier tel que $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ soit une famille libre.
   (a) Justifier l'existence d'un tel entier p.
   (b) Montrer qu'il existe des réels $a_0, \dots, a_{p-1}$ tel que $x_p = \sum\limits_{i=0}^{p-1} a_i x_i$
   (c) On note $E'_x = \text{Vect}(x_0, \dots, x_{p-1})$. Montrer que E'_x est stable par f.
   (d) En déduire que $E_x = E'_x$ et que la famille $\mathcal{B}_p = (x_0, \dots, x_{p-1})$ est une base de E_x.
4. On note $\hat{f}$ l'endomorphisme de E_x obtenu comme restriction de f à E_x, (traduction : $\hat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E_x & \to & E_x \\ u & \mapsto & f(u) \end{array} \right.$).

   Donner la matrice de $\hat{f}$ dans la base $\mathcal{B}_p$.
5. Montrer que la famille $(Id, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E_x)$.
6. (a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que $k < p$

$$\hat{f}^p(x_k) = a_0 x_k + a_1 \hat{f}(x_k) + \cdots + a_{p-1} \hat{f}^{p-1}(x_k)$$

   (b) En déduire que l'on a $\hat{f}^p - a_{p-1}\hat{f}^{p-1} - \cdots - a_0 Id = 0$